

ANÁLISE DE DEFORMAÇÕES EM LAJES FUNGIFORMES

YANICK LOPES VARELA

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de
MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

Orientador: Professor Doutor Jorge Manuel Chaves Gomes Fernandes

JUNHO DE 2016

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2015/2016

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ miec@fe.up.pt

Editado por

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ feup@fe.up.pt

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2015/2016 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2016*.

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respetivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão eletrónica fornecida pelo respetivo Autor.

A minha querida e amada Avó, Nhá Tuna

“Aqueles que passam por nós não vão sós, não nos deixam sós. Deixam um pouco de si e levam um pouco de nós”

ANTOINE DE SAINT

AGRADECIMENTOS

Queria aproveitar esta oportunidade, para agradecer a todos os que me acompanharam ao longo desta etapa e que contribuíram de diversas formas para que a realização deste trabalho fosse possível.

Primeiramente, é com elevada consideração e respeito que agradeço ao meu orientador Professor Jorge Chaves por toda disponibilidade, dedicação, partilha de conhecimentos assim como pela boa disposição, a qual me deu pujança e otimismo para encarar este trabalho.

Aos meus pais, Manuel Gonçalves Varela e Maria Madalena Lopes Tavares, aqui fica um grande e sincero obrigado e uma eterna gratidão, por terem acreditado em mim mesmo nos momentos mais difíceis e por terem apostado sem êxito algum na minha capacidade, até porque nada disso seria possível sem eles.

Agradeço a minha querida prima Margarida Borges, irmã, melhor amiga, por ter sempre me acompanhado com os seus conselhos, a sua amizade, carinho e principalmente o seu companheirismo durante todo o meu trajeto finalizado agora.

Ao meu tio, Júlio, por ter confiado na minha capacidade e pela força transmitida, durante todo o meu percurso académico.

Agradeço ao Professor Nelson Vila Pouca, pelo esclarecimento de algumas dúvidas e partilha de conhecimentos ao longo da realização deste trabalho.

Agradeço ao Professor Raimundo Delgado pela sua disponibilidade, apoio e partilha de conhecimentos que serviu e muito para o primeiro avanço da realização desta dissertação.

E por fim a todos meus amigos e colegas por todo companheirismos e troca de conhecimentos ao longo desta fase.

RESUMO

O controle da deformação nos elementos estruturais (neste caso nas lajes de betão armado) é um dos fatores fundamentais para a garantia do bom funcionamento das estruturas em estado limite de serviço, sendo esta limitada pelas diferentes normas de cálculo. Por forma a garantir o cumprimento dessas limitações, torna-se necessário estar em posse de ferramentas que permitam caracterizar numa forma razoável (tratando-se de elementos em betão armado) as deformações desses elementos.

De acordo com a legislação em vigor na União Europeia (Eurocódigos Estruturais), são propostos métodos que permitem controlar essas deformações, ou cumprindo determinadas relações geométricas entre a espessura das peças e o seu vão, ou calculando explicitamente essas deformações. Estes métodos de cálculo propostos pelo EC2 são relativamente fáceis de implementar em peças lineares ou em peças em que se possa estabelecer uma analogia entre o seu funcionamento e o funcionamento de peças lineares.

A presente dissertação foi desenvolvida com o objetivo de estudar e apresentar uma ferramenta para o cálculo de deformações a longo prazo em lajes fungiformes maciças, visto que este tipo de lajes não se enquadra facilmente nas estruturas descritas no parágrafo anterior.

Reconhecendo assim a necessidade de se desenvolver uma ferramenta para o cálculo de deformações em lajes fungiformes maciças, começou-se primeiramente por estudar os métodos de cálculo de deformações existentes para elementos unidirecionais, para depois então prosseguir a adaptação do mesmo ao elemento em estudo num ambiente bidirecional. Utilizando a metodologia de cálculo exposto no EC2, desenvolveu-se então um método que, baseado no Princípio dos Trabalhos Virtuais, permite, com o auxílio de uma folha de cálculo de Excel, e recolhendo resultados (momentos fletores) de um programa de cálculo estrutural baseado no Método dos Elementos Finitos, calcular a deformação de lajes fungiformes maciças.

Aplicou-se primeiro o método a um exemplo de um painel 6.0*6.0 m² simplesmente apoiado e fez-se a validação do mesmo, confrontando os resultados dos deslocamentos elásticos resultantes deste método com os obtidos pelo programa de cálculo utilizado (Robot Structural Analysis Professional 2015); foram obtidos resultados bastante fiáveis, com um desvio de 3%.

Calculou-se em seguida o deslocamento a longo prazo para esse painel, com o método desenvolvido neste trabalho e com o método bilinear (Favre et al. 1985), por forma a ter uma noção da ordem de grandeza do valor expectável para essa deformação. Seguidamente, fez-se a análise de deformação a curto e longo prazo com o método desenvolvido para dois exemplos de lajes fungiformes: (i) Laje fungiforme simétrica com 15.0*15.0 m²; (ii) Laje fungiforme não simétrica com 10.0*17.0 m². No início do estudo de cada exemplo são descritas a geometria, as ações atuantes e respetivas combinações, as propriedades dos materiais, e a quantificação da armadura requerida para garantir a resistência aos estados limites últimos.

Por último, fez-se uma análise e discussão dos resultados obtidos, comparando valores de deslocamentos elásticos dados pelo programa de cálculo e deslocamentos dados pelo método desenvolvido: elásticos, a curto-prazo (com efeito da armadura e fendilhação) e a longo prazo (considerando ainda a fluência).

PALAVRAS-CHAVE: Fendilhação, Laje fungiforme maciça, Deformação

ABSTRACT

Controlling deformation in structural elements (in this case in reinforced concrete slabs) is one of the key factors for ensuring the proper functioning of the structures in serviceability limit state, which is limited by the different structural codes. In order to ensure compliance with these limits, it is necessary to be in possession of tools to characterize in a reasonable way (in the case of elements in reinforced concrete) the deformations of these elements.

According to the legislation applied within the European Union (Structural Eurocodes) there are some methods proposed for verifying these deformations, or fulfilling certain geometric relationships between the thickness of the pieces and their span, or explicitly calculating these deformations. These calculation methods proposed by EC2 are relatively easy to implement in concrete linear elements or in concrete elements that can be designed using an analogy between those elements and linear elements.

This work was developed in order to study and present a tool for long-term deformations calculation of fungiform massive slabs, since this type of slabs do not easily fit into the structures described in the previous paragraph.

Recognizing the need to develop a tool to evaluate deformations in fungiform massive slabs, we started to study the existing calculation methods for evaluating deformations in unidirectional elements, and then proceed to adapt it to bidirectional elements. Using the calculation methodology stated on EC2, and using a method based on the principle of virtual work, it was developed a method that allows, with the aid of an Excel worksheet, and collecting results (bending moments) from a structural calculation program based on the Finite Element method, calculate the deformation of fungiform massive slabs.

First, it was applied the method to an example of a panel $6.0 * 6.0$ m², simply supported and it was made its validation, comparing the results of elastic displacements produced by this method with those obtained by the used calculation program (Robot Structural Analysis Professional 2015); they were obtained quite reliable results, with a deviation of 3%.

Then, it was evaluated the long-term deformation for this panel, with the method developed in this work and with the bilinear method (Favre et al. 1985) in order to get a sense of the order of magnitude of the expected value for that deformation. Then, it was evaluated the short and long term deformation analysis with the developed method for two examples of flat slabs: (i) fungiform symmetric slab with $15.0 * 15.0$ m²; (ii) non-symmetric fungiform slab with $10.0 * 17.0$ m². At the beginning of the study of each example are described the geometry, the actions and their combinations, the material properties, and the quantification of the required reinforcement to ensure resistance to ultimate limit state.

Finally, it was made an analysis and discussion of the results, comparing elastic displacement values given by calculation program and displacement given by the developed method: elastic, short-term (with effect of reinforcement and crack formation) and long term (still considering creep).

KEYWORDS: Cracking, Massive Flat Slab, Deformatio.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS.....	I
RESUMO.....	III
ABSTRACT.....	V
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 ENQUADRAMENTO DO TEMA E OBJETIVO DA DISSERTAÇÃO	1
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO	3
2 TIPOS CORRENTES DE LAJES E O SEU EMPREGO NA CONSTRUÇÃO	5
2.1 QUANTO À COMPOSIÇÃO	5
2.2 QUANTO AO TIPO DE APOIO	6
2.3 QUANTO AO MODO DE FLEXÃO DOMINANTE	10
2.4 QUANTO À CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO.....	10
2.5 QUANTO AO PROCESSO CONSTRUTIVO	11
3 LAJES FUNGIFORMES – METODOS DE CÁLCULO	13
3.1 MÉTODO DAS GRELHAS.....	13
3.2 MÉTODO DOS PÓRTICOS EQUIVALENTES.....	15
3.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	17
4 METODOLOGIAS PARA O CÁLCULO DE DEFORMAÇÕES – METODOS TRADICIONAIS E EMPREGO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS.....	19
4.1 CURVATURA MÉDIA.....	20
4.1.1 EFEITO DA FENDILHAÇÃO.....	20
4.1.2 EFEITO DA FLUÊNCIA.....	21
4.1.3 EFEITO DA RETRAÇÃO	23

4.1.4	TRAÇÃO PURA	23
4.1.5	FLEXÃO PURA	26
4.2	MÉTODO BILINEAR	28
4.2.1	CÁLCULO DA CURVATURA EM ESTADO I	29
4.2.2	CÁLCULO DA CURVATURA EM ESTADO II	30
4.3	MÉTODO DOS COEFICIENTES GLOBAIS	32

5 CÁLCULO DE DEFORMAÇÕES EM LAJES FUNGIFORMES EM AMBIENTE BI-DIMENSIONAL DE ACORDO COM DISPOSIÇÕES DO EC2

5.1	INTRODUÇÃO	37
5.2	MÉTODO DE CÁLCULO RIGOROSO INDICADO PELO EC2	37
5.3	EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO A UMA VIGA DE BETÃO ARMADO	38
5.4	DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DO MÉTODO EM AMBIENTE BIDIRECIONAL	42
5.4.1	DESLOCAMENTO ELÁSTICO, SEM ARMADURA E SEM EFEITO DA FENDILHAÇÃO	44
5.4.2	DESLOCAMENTOS A CURTO PRAZO, CONSIDERANDO A PRESENÇA DE ARMADURA E CONSIDERANDO O EFEITO DA FENDILHAÇÃO	44
5.4.3	DESLOCAMENTOS A LONGO PRAZO, CONSIDERANDO A PRESENÇA DE ARMADURA E CONSIDERANDO O EFEITO DA FENDILHAÇÃO E FLUÊNCIA	45
5.5	EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DO EC2 A UM PAINEL DE LAJE SIMPLEMENTE APOIADA	45
5.6	CÁLCULO DA FLECHA MÁXIMA A LONGO PRAZO UTILIZANDO O MÉTODO BILINEAR ADAPTADO	54
5.6.1	BANDA A-E-B	56
5.6.2	BANDA E-F-G	57
5.6.3	DEFORMAÇÃO FINAL	58

6 EXEMPLOS, DISCUSSÃO E VALIDAÇÃO

6.1	LAJE FUNGIFORME SIMÉTRICA	59
6.2	LAJE FUNGIFORME NÃO SIMÉTRICA	72
	CÁLCULO DE DEFORMAÇÕES	73
6.3	EXEMPLO VIGA SIMPLEMENTE APOIADA	83
6.4	DISCUSSÃO E VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS	88

7 CASO DE ESTUDO	90
7.1 CÁLCULO DE DEFORMAÇÕES	92
7.2 RESULTADOS	105
8 CONCLUSÃO E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	107
8.1 CONCLUSÕES	107
8.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	109
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	111
ANEXOS	113
ANEXO A – COEFICIENTES DE CORREÇÃO PARA A APLICAÇÃO DO MÉTODO BILINEAR (FONTE: (FAVRE ET AL. 1985))	113
ANEXO B – MAPA DOS MOMENTOS FLETORES RESULTANTES DA COMBINAÇÃO QUASE- PERMANENTES DE AÇÕES.....	131

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 - Exemplo da metodologia do cálculo de deformação em lajes armadas em cruz (Fonte: (Favre et al. 1985))	2
Figura 2.1 - Laje mista ligado a perfis metálicos com conectores	6
Figura 2.2 - Laje aligeirada de vigota pré-esforçada	6
Figura 2.3-Laje vigada.....	7
Figura 2.4 - Laje apoiada em solo de fundação.....	7
Figura 2.5 - Laje fungiforme maciça de espessura constante	8
Figura 2.6 - Laje fungiforme com capitel (Tesoro 1991)	8
Figura 2.7 - Laje fungiforme maciça com capitel de espessura constante (Cardoso 2013).....	8
Figura 2.8 - Laje fungiforme aligeirada com bloco perdido (Ramos 2006)	9
Figura 2.9 - Lajes fungiformes aligeiradas com moldes recuperáveis ou nervuradas (Tesoro 1991)	9
Figura 2.10 - Laje armada numa direção	10
Figura 2.11 - Laje armada em duas direções ou em cruz	10
Figura 3.1– Malha com deferentes espaçamentos(Barboza 1992)	14
Figura 3.2--Detalhe da barra de extremidade (Barboza 1992)	15
Figura 3.3- Divisão da laje em pórticos ortogonais independentes (Cruz e Azenha 2013).....	16
Figura 3.4- Carga a considerar no Pórtico na direção X(Cruz e Azenha 2013)	16
Figura 3.5 - Divisão dos pórticos em faixas(NP EN 1992-1-1 2010)	17
Figura 4.1- Variação da rigidez e da curvatura ao longo de uma viga em função do diagrama de momentos e da rigidez a flexão EI.	19
Figura 4.2 - Representação da curvatura, altura útil e as extensões no betão e no aço	20
Figura 4.3 - Relação Momento-Curvatura para as varias fases da estrutura no caso de flexão simples (Tavares 2010)	21
Figura 4.4 - Fluência de um peça de betão (Costa e Appleton 2002)	22
Figura 4.5 - Viga não fendilhada só com armadura inferior	23

Figura 4.6 - Representação da variação da tensão e extensão média do aço e do betão ao longo dum tirante sujeito à tração pura (Fonte:(Camara 2014)).	24
Figura 4.7 - Distância mínima (s) para formação duma nova fenda (Fonte:(Camara 2014))	24
Figura 4.8 - Modelo de cálculo para tração pura (Fonte:(Favre et al. 1985))	25
Figura 4.9 - Extensões médias devido à flexão pura (Fonte:(Favre et al. 1985))	26
Figura 4.10 - Modelo de cálculo para flexão simples (Fonte:(Favre et al. 1985))	27
Figura 4.11 - Teorema dos trabalhos virtuais aplicado ao cálculo da flecha (Fonte:(Favre et al. 1985))	28
Figura 4.12 - Relação Bilinear momento-flecha (Fonte:(Figueiras 2003))	29
Figura 4.13 - Ábaco correspondente ao coeficiente K_{s2} (Fonte:(Favre et al. 1985)).	31
Figura 4.14 - Ponderação do coeficiente de distribuição ζ , consoante as condições de apoio (Fonte:(Camara 2014))	32
Figura 4.15 - Abaco correspondente ao coeficiente k_0 para o primeiro carregamento e para $h/d=1$ (Fonte:(Favre et al. 1985))	34
Figura 4.16 - Abaco correspondente ao coeficiente global K_t para $h/d=1$ e $\phi=2.5$ (Fonte:(Favre et al. 1985))	35
Figura 5.1 - Exemplo de uma viga de dois tramos em continuidade, um dos quais em consola	38
Figura 5.2 - Distribuição das cargas para a combinação quase-permanente	40
Figura 5.3 - Diagrama de momentos para a combinação quase-permanente	40
Figura 5.4 - Aplicação da carga unitária na extremidade da consola	40
Figura 5.5 - Diagrama de momento resultante da carga unitária	40
Figura 5.6 - Painél 6x6 m2 dividido em elementos fintos 0.5x0.5 m2	42
Figura 5.7 - Painél 6x6 Definidos as zonas de secções iguais	43
Figura 5.8 - Painél 6x6 m2 simplesmente apoiada	45
Figura 5.9 - Painél 6x6 m2 devido em elementos fintos 0.25x0.25 m2	46
Figura 5.10 - Valores dos deslocamentos no Painél 6*6 m2 para ELS	48
Figura 5.11 -Secção transversal da zona livre para laje simplesmente apoiada	Erro! Marcador não definido.

Figura 5.12 - Secção transversal da zona de apoio para laje simplesmente apoiada **Erro! Marcador não definido.**

Figura 5.13 - Painél 6x6 m2 com zonas de secções diferentes seleccionadas 50

Figura 5.14 - Esquematização das bandas utilizadas para o Painél 55

Figura 5.15 - Banda A-E-B com a respetiva condição de fronteira e deslocamentos 56

Figura 5.16 - Banda E-F-G com a respetiva condição de fronteira e deslocamentos 57

Figura 6.1 - Laje fungiforme simétrica 15x15 m2 60

Figura 6.2 - Representação dos pontos a calcular os deslocamentos na laje simétrica 61

Figura 6.3- Laje fungiforme 15x15 m2 devido em elementos fintos 0.25x0.25 m2..... 62

Figura 6.4 - Mapa dos deslocamentos sobre a Laje simétrica para ELS 65

Figura 6.5 - Esquematização do momento negativo medio na direção x 66

Figura 6.6 - Laje fungiforme simétrica 15*15 seleccionada por zonas de secções iguais 67

Figura 6.7 - Secção transversal da Zona Livre **Erro! Marcador não definido.**

Figura 6.8 - Secção transversal da Zona de Apoio **Erro! Marcador não definido.**

Figura 6.9 - Laje fungiforme não simétrica 10x17 m2 73

Figura 6.10 - Representação dos pontos a calcular os deslocamentos na laje não simétrica 74

Figura 6.11 - Laje fungiforme 10x17 m2 devido em elementos fintos 0.25x0.25 m2..... 75

Figura 6.12 - Mapa dos deslocamentos sobre a Laje não simétrica para ELS 77

Figura 6.13 - Laje fungiforme 10*17 seleccionada por zonas de secções iguais para as duas direções x e y 78

Figura 6.14 - Secção transversal da Zona Livre para direção Y **Erro! Marcador não definido.**

Figura 6.15 - Secção transversal da Zona de Apoio para direção Y **Erro! Marcador não definido.**

Figura 6.16 - Secção transversal da Zona Livre para direção X **Erro! Marcador não definido.**

Figura 6.17 - Secção transversal da Zona de Apoio para direção X **Erro! Marcador não definido.**

Figura 6.18 - Viga simplesmente apoiada com representação da secção transversal 84

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 3.1 - Distribuição simplificada dos momentos fletores no caso de uma laje fungiforme(NP EN 1992-1-1 2010)	17
Quadro 5.1 - Folha de cálculo da flecha na extremidade da viga em estudo.....	41
Quadro 5.2 - Folha de cálculo em Excel para o deslocamento a curto prazo Erro! Marcador não definido.	
Quadro 5.3 - Resultado das armaduras a dispor na laje simplesmente apoiada	49
Quadro 5.4 - Folha de cálculo em Excel para o deslocamento á longo prazo Erro! Marcador não definido.	
Quadro 6.1 - Valores comuns de Rcp	Erro! Marcador não definido.
Quadro 6.2- Valores de sobrecarga de referencia	Erro! Marcador não definido.
Quadro 6.3- Ações verticais consideradas	60
Quadro 6.4- Valores dos coeficientes Ψ_2 para ULS	Erro! Marcador não definido.
Quadro 6.5- Valores característicos do Aço e do Betão	Erro! Marcador não definido.
Quadro 6.6 - Cálculo da flecha elástica do ponto A (Laje simétrica)	Erro! Marcador não definido.
Quadro 6.7 - Cálculo da flecha elástica do ponto B (Laje simétrica)	Erro! Marcador não definido.
Quadro 6.8 - Cálculo da flecha elástica do ponto C (Laje simétrica)	Erro! Marcador não definido.
Quadro 6.9 - Armaduras para cada direção na laje simétrica	66
Quadro 6.10 - Cálculo da flecha a curto prazo do ponto A (Laje simétrica) Erro! Marcador não definido.	
Quadro 6.11 - Cálculo da flecha a curto prazo do ponto B (Laje simétrica) Erro! Marcador não definido.	
Quadro 6.12 - Cálculo da flecha a curto prazo do ponto C (Laje simétrica) Erro! Marcador não definido.	
Quadro 6.13 - Cálculo da flecha a longo prazo do ponto A (Laje simétrica) Erro! Marcador não definido.	
Quadro 6.14 - Cálculo da flecha a longo prazo do ponto B (Laje simétrica) Erro! Marcador não definido.	

Quadro 6.15 - Cálculo da flecha a longo prazo do ponto C (Laje simétrica)	Erro!	Marcador	não definido.
Quadro 6.16 - Cálculo da flecha elástica para o ponto A (Laje não simétrica)	Erro!	Marcador	não definido.
Quadro 6.17 - Cálculo da flecha elástica para o ponto B (Laje não simétrica)	Erro!	Marcador	não definido.
Quadro 6.18 - Cálculo da flecha elástica para o ponto C (Laje não simétrica)	Erro!	Marcador	não definido.
Quadro 6.19 - Armaduras para cada direção na laje não simétrica.....			77
Quadro 6.20 - Cálculo da flecha a curto prazo do ponto A (Laje não simétrica)	Erro!	Marcador	não definido.
Quadro 6.21 - Cálculo da flecha a curto prazo do ponto B (Laje não simétrica)	Erro!	Marcador	não definido.
Quadro 6.22 - Cálculo da flecha a curto prazo do ponto C (Laje não simétrica)	Erro!	Marcador	não definido.
Quadro 6.23 - Cálculo da flecha a longo prazo para o ponto A (Laje não simétrica)	Erro!	Marcador	não definido.
Quadro 6.24 - Cálculo da flecha a longo prazo para o ponto B (Laje não simétrica)	Erro!	Marcador	não definido.
Quadro 6.25 - Cálculo da flecha a longo prazo para o ponto C (Laje não simétrica)	Erro!	Marcador	não definido.
Quadro 6.26 - Cálculo da flecha elástica a meio vão da viga			84
Quadro 6.27 - Cálculo da flecha a curto prazo a meio vão da viga			86
Quadro 6.28 - Cálculo da flecha a longo prazo a meio vão da viga			87
Quadro 6.29 - Comparação entre os deslocamentos elásticos do método e programa de cálculo			88
Quadro 6.30 - Resumo dos deslocamentos e suas relações.....			88

SÍMBOLOS, ACRÓNIMOS E ABREVIATURAS

E_{cm} - Módulo de elasticidade medio do betão aos 28 dias [GPa]

E_s - Módulo de elasticidade do aço

$E_{c, eff}$ - Módulo de elasticidade efetivo do betão

I_c - Momento de inercia da secção do betão [m^4]

A_s - Área da secção transversal da armadura

$A_{s'}$ - Área de armadura comprimida

α - Coeficiente de homogeneização

α_e - Coeficiente de homogeneização dado pela razão entre o módulo de elasticidade do aço e o módulo de elasticidade do betão

c - Recobrimento

d - Altura útil da secção, dada pela distância entre o centro de gravidade das armaduras e da fibra mais comprimida

d' - Altura útil da secção, dada pela distância entre o centro de gravidade das armaduras e da fibra mais tracionada.

ε_c - Extensão no betão

$\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ - Deformação de fluência

$\varepsilon_{ci}(t_0)$ - Deformação instantânea

$\varepsilon_{cs}(ts)$ - Deformação de retração

$\varepsilon_{cs}(t, ts)$ - Deformação total de retração para o instante t

ε_{cs0} - Coeficiente de retração nominal

$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0)$ - Deformação mecânica de um elemento de betão

ε_{cm} - Valor médio de extensão no betão

$\varepsilon_{ct}(t)$ - Deformação total de um elemento de betão

ε_s - Extensão no aço

ε_{sm} - Valor médio de extensão no aço

$1/r$ – Curvatura numa determinada secção

ζ – Coeficiente de repartição

f_{ck} – Tensão característica de rotura do betão à compressão, aos 28 dias de idade

f_{cm} – Resistência média à compressão aos 28 dias

f_{ctm} – Resistência média à tração do betão

f_{yk} – Tensão de cedência característica

h – Altura total da secção

N_{cr} – Esforço axial de fendilhação

ρ – Percentagem de armadura tracionada

ρ' – Percentagem de armadura comprimida

$\phi(t, t_0)$ – Coeficiente de fluência

ϕ – Diâmetro do varão de aço

ψ_0 – Coeficiente para a determinação do valor de combinação de uma ação variável

ψ_1 – Coeficiente para a determinação do valor frequente de uma ação variável

ψ_2 – Coeficiente para a determinação do valor quase permanente de uma ação variável

ELS – Estado limite de serviço

ELU – Estado limite último

EC1 – EUROCÓDIGO 1

EC2 – EUROCÓDIGO 2

1

INTRODUÇÃO

1.1 ENQUADRAMENTO DO TEMA E OBJETIVO DA DISSERTAÇÃO

Como se sabe, a deformação é um dos fatores condicionantes no que diz respeito ao aspeto e o bom funcionamento das estruturas de betão armado em serviço. Deste modo, os valores máximos admissíveis para este fenómeno encontram-se limitados pelas diversas normas vigentes, de forma a evitar algumas patologias que, embora não impliquem o colapso das estruturas, podem impedir o seu normal desempenho, tais como:

- Aparecimento de danos em elementos não estruturais: paredes divisórias (fissuração), envidraçados (empenamento), revestimentos cerâmicos (fissuração), etc;
- Comprometimento de funcionalidades da construção: condicionamento do funcionamento de equipamentos ou máquinas que necessitem de horizontalidade para funcionar, acumulação de águas pluviais em coberturas planas, etc;
- Comprometimento da aparência e estética das estruturas.

Assim, segundo o EC2 (NP EN 1992-1-1 2010) as verificações aos Estados Limites de Deformação podem ser feitas de duas formas, para peças à flexão: a verificação direta, em que se faz a comparação da flecha calculada com o valor limite estabelecido, ou a verificação indireta, em que o cálculo explícito da flecha pode ser dispensado, quando são respeitados os valores limites de esbelteza ($l(vão)/d(\text{altura útil})$) estabelecidos.

Não respeitando no dimensionamento das peças os valores limites de esbelteza definidos pelo EC2, haverá necessidade de calcular explicitamente a flecha, de modo a prosseguir com a verificação direta dos limites estabelecidos.

O EC2 (NP EN 1992-1-1 2010), no capítulo 7, propõe um método mais rigoroso para fazer este cálculo, método esse que é relativamente simples de aplicar em peças lineares (vigas) ou em lajes armadas numa só direção.

Para lajes de betão armado armadas em duas direções, o cálculo das deformações torna-se mais complexo, uma vez que este tipo de lajes está submetido a esforços de flexão nas duas direções, e além disso o efeito da fendilhação e dos fenómenos diferidos no tempo, tais como a fluência e a retração, irão exigir uma análise não-linear do elemento em estudo. Mesmo assim, existem alguns métodos tradicionais e um método mais rigoroso proposto pelo EC2, como já referido, que é claro e de fácil utilização para vigas e lajes armadas numa só direção. Para lajes armadas em cruz (em duas direções), apoiadas sobre vigas de bordo, ainda se consegue chegar a resultados razoáveis, aplicando estes métodos tradicionais às vigas de bordo e a uma banda central, conseguindo assim chegar ao

deslocamento em qualquer ponto sobre a laje, conforme ilustra a Figura 1.1, em que se pretende o deslocamento no ponto central do painel.

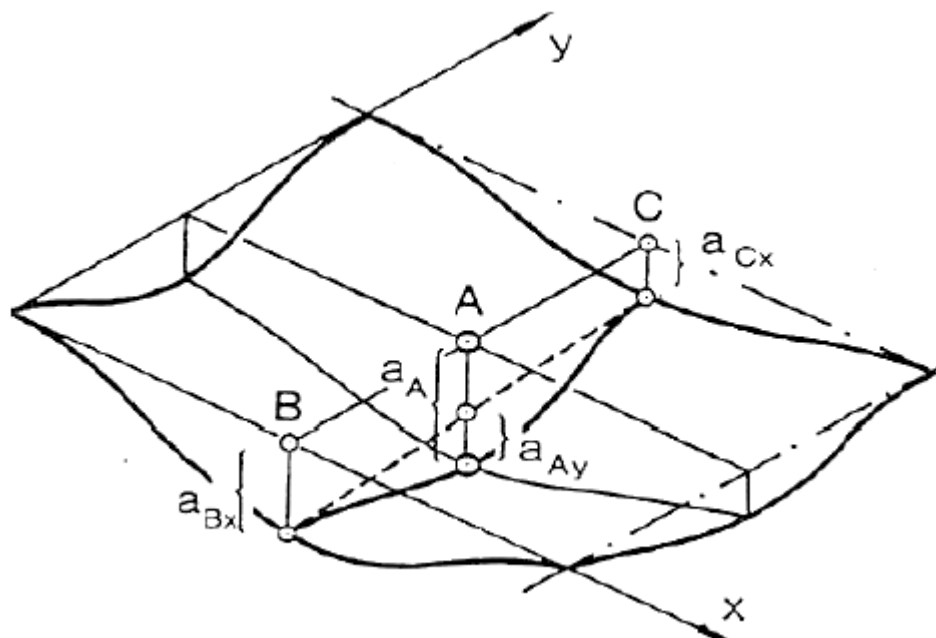


Figura 1.1 - Exemplo da metodologia do cálculo de deformação em lajes armadas em cruz (Fonte: (Favre et al. 1985))

No entanto, para lajes fungiformes, não parece evidente o estabelecimento de uma metodologia que permita utilizar este método de uma forma clara. Esta razão deve-se ao facto de o comportamento da laje não ser tão bem definido como no caso anterior (laje apoiada nas vigas, que por sua vez apoiam nos pilares), dado que a laje fungiforme se encontra apoiada apenas nos pilares.

Com isso, pretende-se com esta dissertação desenvolver uma ferramenta de cálculo de deformação, de acordo com o método mais rigoroso proposto pelo EC2, aplicado a lajes fungiformes, com a qual se consiga obter os deslocamentos mais próximo da realidade, em duas ocasiões: a curto prazo, considerando as armaduras e os efeitos da fendilhação, e a longo prazo, entrando com o efeito da fluência, numa laje fungiforme maciça.

Para isso, utilizando um programa de cálculo de cariz comercial, baseado no método dos Elementos Finitos, (Robot Structural Analysis Professional 2015), estudou-se inicialmente um painel de laje de 6.0*6.0 m2, simplesmente apoiado, e desenvolveu-se um método baseado no Princípio dos Trabalhos Virtuais com o qual se procurou obter o deslocamento elástico em qualquer ponto da laje, utilizando para isso os mapas de momentos fletores fornecidos pelo programa para um determinado carregamento e os mapas desse momentos para uma carga unitária, aplicada no ponto cujo deslocamento se procura obter. Verificou-se a fiabilidade dos resultados obtidos pelo método implementado, comparando os deslocamentos elásticos obtidos por esse método com os obtidos pelo programa de cálculo. Calculou-se em seguida o deslocamento espectável a longo prazo pelo método implementado, entrando com o efeito da fendilhação (considerando os efeitos decorrentes da alteração

de rigidez das zonas das lajes fendilhadas, em que o momento atuante instalado, para um dado carregamento, é superior ao momento de fendilhação) e da fluência. Utilizou-se ainda um método simplificado (método bilinear), usando uma metodologia especificada em (Favre et al. 1985), de forma a comparar a ordem de grandeza dos deslocamentos obtidos pelos dois métodos.

Fez-se em seguida a análise de duas lajes, uma simétrica e outra não simétrica, calculando os deslocamentos em 3 pontos notáveis, de forma a comparar os deslocamentos elásticos obtidos pelo programa de cálculo com os obtidos por este método. Fez-se assim o cálculo de três tipos de deslocamentos: o deslocamento elástico, o deslocamento a curto prazo, entrando com o efeito das armaduras e da fendilhação, e o deslocamento a longo prazo, entrando com o efeito das armaduras, da fendilhação e da fluência. Por último, fez-se uma comparação da ordem de grandeza do valor da razão entre os deslocamentos a longo prazo e os deslocamentos elásticos obtidos na laje, com os valores obtidos numa viga simplesmente apoiada, uma vez que em peças lineares se admite que o método é perfeitamente válido.

Por ultimo, numa fase posterior, achou-se ainda interessante adaptar o método a um caso real de estudo de uma laje fungiforme maciça com capiteis, e fazer uma análise idêntica à feita nos exemplos anteriores.

É de chamar a atenção que existem várias incertezas associados às propriedades dos materiais, às características do seu funcionamento, às condições de apoio e às cargas atuantes na estrutura, que condicionam a extrapolação destes resultados para a realidade. Não obstante, e tendo em conta este enquadramento, o cálculo da deformação por este ou outro método será sempre uma ferramenta claramente útil, permitindo perceber quantitativamente a menor ou maior sensibilidade da deformabilidade do elemento estrutural às cargas nele aplicadas.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

De forma a alcançar e perceber duma forma clara os objetivos deste trabalho, dividiu-se esta dissertação em 7 capítulos cujos conteúdos a seguir se resumem:

- **Capítulo 1 – Introdução** – explica o enquadramento do tema assim como os objetivos que levaram à realização desta dissertação, contendo também a organização e resumo dos capítulos considerados.
- **Capítulo 2 – Tipos correntes de lajes e o seu emprego na construção** – apresentam-se os diferentes tipos de lajes correntes utilizados, assim como o seu emprego na construção civil.
- **Capítulo 3 – Lajes fungiformes-Métodos de cálculo** – apresenta-se a abordagem de alguns dos métodos existentes considerados mais relevantes para a análise das lajes fungiformes: método das grelhas, método dos pórticos equivalentes e o método dos elementos finitos, que foi o utilizado na realização deste trabalho.
- **Capítulo 4 – Deformações em lajes fungiformes – métodos tradicionais e emprego do princípio dos trabalhos virtuais** – dedicou-se este capítulo à descrição das diferentes metodologias existentes para o cálculo de deformações, procurando também compreender os efeitos dos fenómenos diferidas no tempo no cálculo dessas deformações.
- **Capítulo 5 – Cálculo de deformações em lajes fungiformes em ambiente bi-dimensional de acordo com disposição do EC2** – faz-se neste capítulo a sistematização

do método a utilizar no cálculo da deformação de lajes fungiformes, de acordo com o método mais rigoroso proposto no EC2.

- **Capítulo 6 – Exemplos, discussão e validação** – apresenta-se a aplicação do método sistematizado no capítulo anterior a alguns exemplos de lajes fungiformes, comparando os resultados dos deslocamentos elásticos obtidos com os obtidos pelo programa de cálculo utilizado de maneira a fazer a validação do método; calculam-se igualmente deslocamentos a curto prazo, entrando com o efeito da armadura e da fendilhação, e a longo prazo, entrando com ainda com o efeito da fluência. Faz-se também uma discussão sobre esses resultados tendo como referência a ordem de grandeza dos valores obtidos para os valores dos deslocamentos a longo prazo numa viga simplesmente apoiada.
- **Capítulo 7 – Caso de Estudo** – Faz-se a adaptação e aplicação do método desenvolvido a uma estrutura real de uma laje fungiforme com capiteis.
- **Capítulo 8 – Conclusão e desenvolvimentos futuros** – são descritas as conclusões retiradas da elaboração desta dissertação, bem como os possíveis desenvolvimentos futuros no âmbito da temática abordada.

2

TIPOS CORRENTES DE LAJES E O SEU EMPREGO NA CONSTRUÇÃO

Neste capítulo pretende-se fazer a descrição e classificação dos diversos tipos de lajes utilizadas para executar pavimentos de edifícios. Assim, estas podem ser classificadas quanto à composição, quanto ao tipo de apoio, quanto ao modo de flexão dominante, quanto a caracterização do comportamento e quanto ao processo construtivo.

2.1 QUANTO À COMPOSIÇÃO

✚ Lajes em betão armado:

- Maciça - com espessura constante ou não;
- Aligeiradas nervuradas (com moldes recuperáveis ou com moldes perdidos) – Apresentam um peso próprio inferior à laje maciça devido à introdução de moldes de cofragens que podem ser recuperáveis ou não, originando assim nervuras dispostas numa ou duas direções.

✚ Laje mista:

- Laje formada por uma chapa metálica, sobre a qual é betonada uma lajeta de betão, funcionando a chapa como armadura para momentos positivos (daí a designação de Laje Colaborante);
- Estas lajes são habitualmente ligadas a perfis metálicos por meio de conectores metálicos.

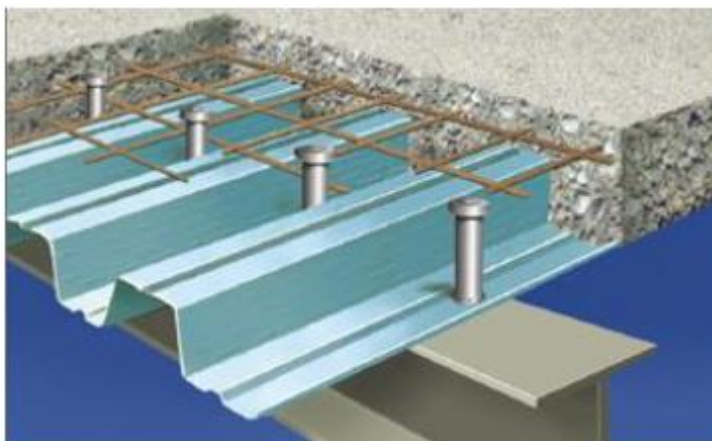


Figura 2.1 - Laje mista ligado a perfis metálicos com conectores

- ✚ Lajes de vigotas pré-esforçadas: como o próprio nome indica, esta laje é constituída por vigotas pré-esforçadas nas quais se apoiam blocos de cofragem (abobadilhas) cerâmicos, de argamassa de cimento, de betão leve ou mesmo de outros materiais leves (como poliestireno expandido), os quais são solidarizados por uma lajeta de betão betonada em segunda fase, como se poder ver na Figura 2.2.

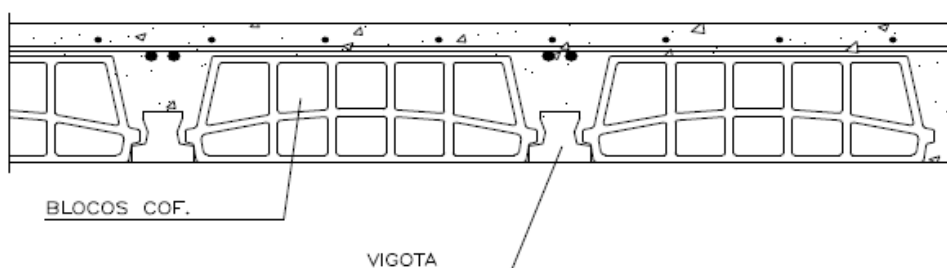


Figura 2.2 - Laje aligeirada de vigota pré-esforçada

- ✚ Metálicas:
 - Chapa Protendida;
 - Gradil.

2.2 QUANTO AO TIPO DE APOIO

- ✚ Lajes vigadas: Lajes que apoiam diretamente sobre vigas, armadas numa ou em duas direções.

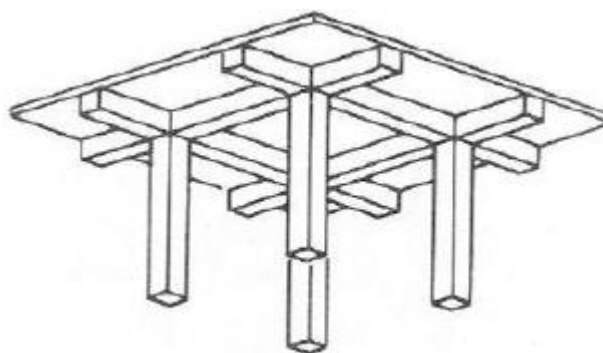


Figura 2.3-Laje vigada

- ✚ Lajes apoiadas em superfícies deformáveis: como o próprio nome indica, são lajes que apoiam-se em superfícies deformáveis ou meios de suportes com características elásticas, como por exemplo lajes de pavimento apoiadas diretamente em solos de fundação, conforme apresentada na Figura 2.4.



Figura 2.4 - Laje apoiada em solo de fundação

- ✚ Lajes fungiformes: são lajes que apoiam diretamente sobre os pilares, podendo a ligação laje-pilar ser feita diretamente ou através de capiteis (espessamento da laje na ligação aos pilares). Dependendo de alguns fatores (carga a suportar, exigências arquitetônicas ou tamanho do vão), existem várias soluções para laje fungiformes, tais como:
- Lajes fungiformes maciça de espessura constante – Esta solução é normalmente utilizada em vãos da ordem dos 4.5 a 6 m e com uma carga de utilização de valor moderado. Nestas condições, esta solução é normalmente uma solução económica, proporcionando um teto liso, facilitando assim a utilização do espaço do ponto de vista arquitetónico.

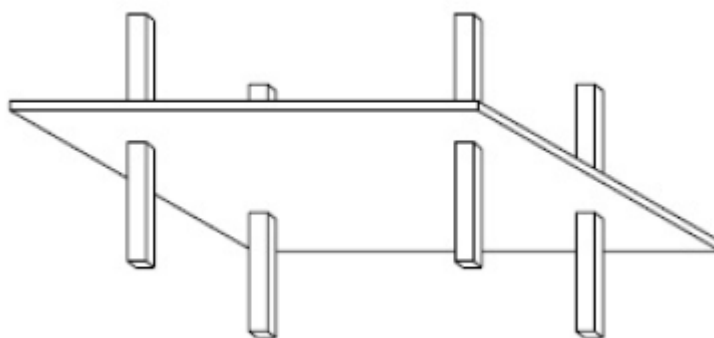


Figura 2.5 - Laje fungiforme maciça de espessura constante

- Lajes fungiformes maciças com capitéis de espessura variável – Opta-se por esta solução quando as cargas são mais elevadas ou os vãos a vencer são maiores, conseguindo-se assim aumentar a resistência aos esforços de flexão e punçoamento na ligação da laje ao pilar. Esse aumento de resistência é obtido alargando a secção do pilar na zona superior de ligação com a laje, como podemos observar na Figura 2.6. Esta solução é recomendável para vãos entre os 6 a 10 metros.

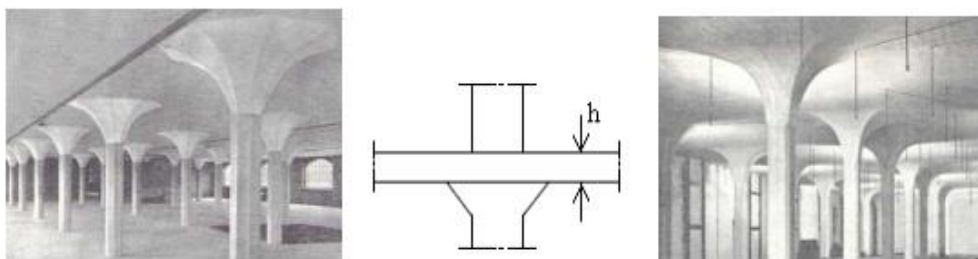


Figura 2.6 - Laje fungiforme com capitel (Tesoro 1991)

- Lajes fungiformes maciças com capitéis de espessura constante – Opta-se por esta solução pelos mesmos motivos da solução anterior, mas resolvendo o problema de forma diferente, aumentando a espessura da laje sobre o pilar de forma constante, estendendo-se esse aumento a uma distancia de cerca de $1/6$ a $1/8$ do vão para cada lado do pilar, conforme apresentada na Figura 2.7.

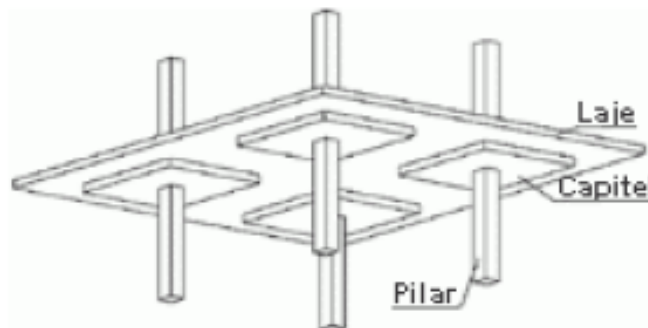


Figura 2.7 - Laje fungiforme maciça com capitel de espessura constante (Cardoso 2013)

- Lajes fungiformes aligeiradas com blocos de aligeiramento perdidos – Adota-se esta solução nos casos em que se pretende diminuir o peso próprio da estrutura, mantendo a face inferior da laje lisa, incorporando blocos de aligeiramento na laje. Esta solução permite vencer vãos até 12.0 m, resultando numa laje em que apresenta nervuras numa ou em duas direções formadas pelo betão entre os blocos de aligeiramento. Estas nervuras formam uma grelha, que permite resistir os esforços de flexão instaladas na laje. As zonas maciças sobre os pilares (onde não se coloca o aligeiramento), funcionam como capitéis, de forma a melhorar a resistência aos esforços de corte na ligação laje-pilar, conforme apresentado na Figura 2.8.



Figura 2.8 - Laje fungiforme aligeirada com bloco perdido (Ramos 2006)

- Lajes fungiformes aligeiradas com moldes recuperáveis – Esta solução emprega-se nos mesmos casos referidos para a solução anterior, mas em que não haja necessidade de manter a face inferior da laje lisa. É usual definir a uma zona de maciça junto ao pilar, por forma a resolver de forma adequada a zona de momentos negativos e de punçoamento, mais importantes na zona do mesmo.



Figura 2.9 - Lajes fungiformes aligeiradas com moldes recuperáveis ou nervuradas (Tesoro 1991)

2.3 QUANTO AO MODO DE FLEXÃO DOMINANTE

- ✚ Lajes armadas numa direção – Estamos em presença desta solução quando os esforços que se desenvolvem numa direção são muito superiores aos que se desenvolvem na direção perpendicular. Segundo (NP EN 1992-1-1 2010) “uma laje sujeita predominantemente a cargas uniformemente distribuídas pode ser considerada como resistente numa só direção nos casos seguintes:

- Possuir dois bordos livres (não apoiados) sensivelmente paralelos;
- Corresponder à parte central de uma laje sensivelmente retangular apoiada nos quatro bordos e com uma relação do vão mais longo para o vão mais curto superior a 2.”

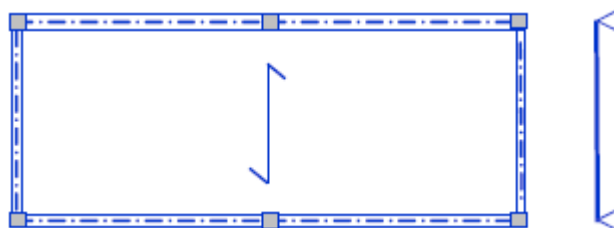


Figura 2.10 - Laje armada numa direção

- ✚ Lajes armadas em duas direções, ou armadas em cruz – Estamos em presença desta solução quando a laje se encontra apoiada nos quatro bordos e os esforços nas duas direções são aproximadamente da mesma ordem de grandeza; a relação atrás referida deverá ser inferior a 2.

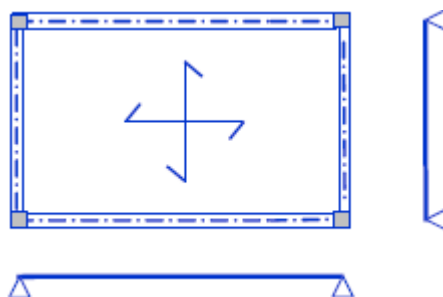





Figura 2.11 - Laje armada em duas direções ou em cruz

2.4 QUANTO À CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO

- ✚ Lajes finas – são lajes cuja a sua espessura é inferior a 1/10 do vão. Neste tipo de laje despreza-se a contribuição do esforço transversal para o cálculo das deformações, na laje, considerando válida a hipótese de Kirchhoff;
- ✚ Lajes espessas – lajes para os quais não se verificam as condições acima descritas, não sendo válida a hipótese de Kirchhoff;
- ✚ Lajes Isotrópicas – são lajes em que são formados por material homogêneos e de comportamento elástico linear e iguais nas duas direções.

2.5 QUANTO AO PROCESSO CONSTRUTIVO

-  Lajes betonadas “in situ” – como o próprio nome indica, toda a composição e execução da laje é feito no lugar onde vai ficar a laje;
-  Lajes com pré-fabricação total – esta designação é quando toda a laje previamente executada é colocada sobre as vigas sendo apenas solidarizado no local;
-  Lajes com pré-fabricação parcial – quando uma parte da laje é pré-fabricada e colocada sobre as vigas formando uma lajeta inferior armada e servindo de cofragem para à parte a betonar “in situ”.

3

LAJES FUNGIFORMES – METODOS DE CÁLCULO

Existem vários métodos de cálculo para lajes fungiformes que nos permitem obter bons resultados em situações mais correntes e que são de fácil aplicação para lajes regulares. Os métodos clássicos de análise de estruturas baseiam-se em modelos bidimensionais, sendo que uma laje fungiforme não é facilmente assimilável a uma estrutura bidimensional.

Vão descrever-se alguns métodos desenvolvidos no sentido de permitir uma análise mais correta de uma laje fungiforme tais como:

- 1) Método dos pórticos equivalentes: aplicável a lajes regulares em que a resolução pode ser feita manualmente pelo método de Cross, ou com o auxílio de um programa básico de cálculo de pórticos;
- 2) Método das grelhas: método de fácil aplicação, adaptado a um programa de cálculo bidirecional;
- 3) Método dos elementos finitos: com o avanço dos programas de cálculo este método apresenta-se atualmente um dos mais poderosos e refinados métodos de cálculo, permitindo fazer uma análise global da estrutura, ou simplesmente analisar casos particulares de uma estrutura que não tenha comportamento simples corrente.

3.1 MÉTODO DAS GRELHAS

O método das grelhas é um método que consiste na substituição de uma laje por uma grelha equivalente, formada por barras em duas direções, de modo a que as rigidezes longitudinais da laje em cada direção sejam concentradas nas barras dessa direção. (Duarte 1998)

“No processo de aplicação da técnica, deve-se garantir que as rigidezes das barras sejam tais que, ao submeterem-se as duas estruturas a um mesmo carregamento, elas se deformem de maneira idêntica e que os esforços solicitantes em qualquer barra da grelha sejam iguais às resultantes das tensões na seção transversal da parte da laje que a barra representa.

Para que um elemento infinitesimal de laje esteja em equilíbrio, de acordo com a teoria clássica de placas, é necessário que os momentos torsores em duas direções ortogonais sejam iguais. Na grelha equivalente obtida no desenvolvimento da técnica, não há princípios matemáticos ou físicos que garantam tal condição. Entretanto, se a malha da grelha for suficientemente pouco espaçada, a mesma deformar-se-á formando uma superfície lisa e apresentará distorções aproximadamente iguais nas

direções ortogonais, bem como momentos torsores aproximadamente iguais se as rigidezes à torção forem as mesmas nas duas direções.

Convém ressaltar que nas barras da grelha os momentos fletores são proporcionais apenas às curvaturas de sua direção, fato este que resulta num inconveniente a mais no uso da técnica, uma vez que num elemento de placa, o momento fletor numa direção depende tanto da curvatura dessa direção como da ortogonal a ela.” (Barboza 1992)

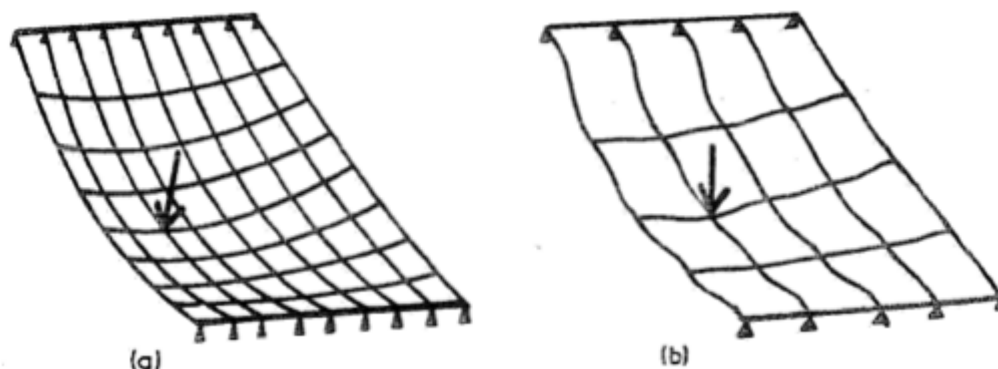


Figura 3.1– Malha com diferentes espaçamentos(Barboza 1992)

Devido à grande variedade da forma, do modo de carregamento, e das condições de apoio das lajes, será difícil estabelecer uma única regra para a escolha de malha que melhor se adapta à grelha. No entanto, transcrevem-se algumas recomendações válidas para lajes retangulares, que devem ser adaptadas a cada laje a modelar de acordo com as indicações de HAMBLY [1976] apresentados em (Barboza 1992):

1. Os elementos de grelha devem localizar-se em posições pré-determinadas pelo projeto, tais como linhas de apoio, ao longo das vigas de extremidade, bem como de outras se existirem, que contenham ação específica;
2. Numa laje isótropa cada barra deve ter no máximo largura igual a $1/4$ do vão transversal ao seu eixo;
3. Quanto mais densa a malha, melhores serão os resultados obtidos. No entanto essa melhoria deixa de acontecer se a largura das barras for menor do que 2 ou 3 vezes a espessura da laje;
4. Numa laje ortótropa, na direção de menor inércia, deve-se considerar a largura das barras igual a 40% do vão transversal ao seu eixo. Caso haja dúvidas quanto à isotropia ou ortotropia da laje, deve-se adotar o critério anterior;
5. Deve-se colocar uma linha de barras no contorno livre da laje, cuja largura para o cálculo do momento de inércia à torção deve ser diminuída de $0,3 h$, por se tratar do ponto por onde passa a resultante das tensões de corte devidas à torção;

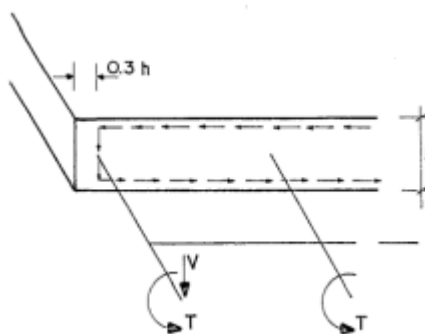


Figura 3.2--Detalhe da barra de extremidade (Barboza 1992)

6. Nas regiões de grande concentração de esforços, tais como apoios ou cargas concentradas, recomenda-se dispor uma malha cuja largura das barras não seja superior a três ou quatro vezes a espessura da laje.

É importante salientar que esta técnica permite apenas uma análise para cargas verticais, e que devido à dificuldade de obter uma boa aproximação da rigidez de torção da laje, atribui-se uma rigidez à torção nula nas barras, para que não surjam momentos torsores nas mesmas. Consequentemente, o modelo é mais flexível, o que leva à obtenção de maiores deslocamentos verticais do que os que na realidade se verificam. De qualquer forma estaremos sempre pelo lado da segurança.

3.2 MÉTODO DOS PÓRTICOS EQUIVALENTES

O método dos pórticos equivalentes é um método simplificado para determinação de esforços que se adapta a lajes regulares em que seja possível estabelecer um sistema regular de pórticos ortogonais independentes, em que as ações dominantes sejam cargas uniformemente distribuídas.

Segundo o EC2 este método consiste nas seguintes etapas:

- a) Divisão da laje em pórticos independentes longitudinalmente e transversalmente constituídas por pilares e troços da laje conforme ilustra na Figura 3.3.

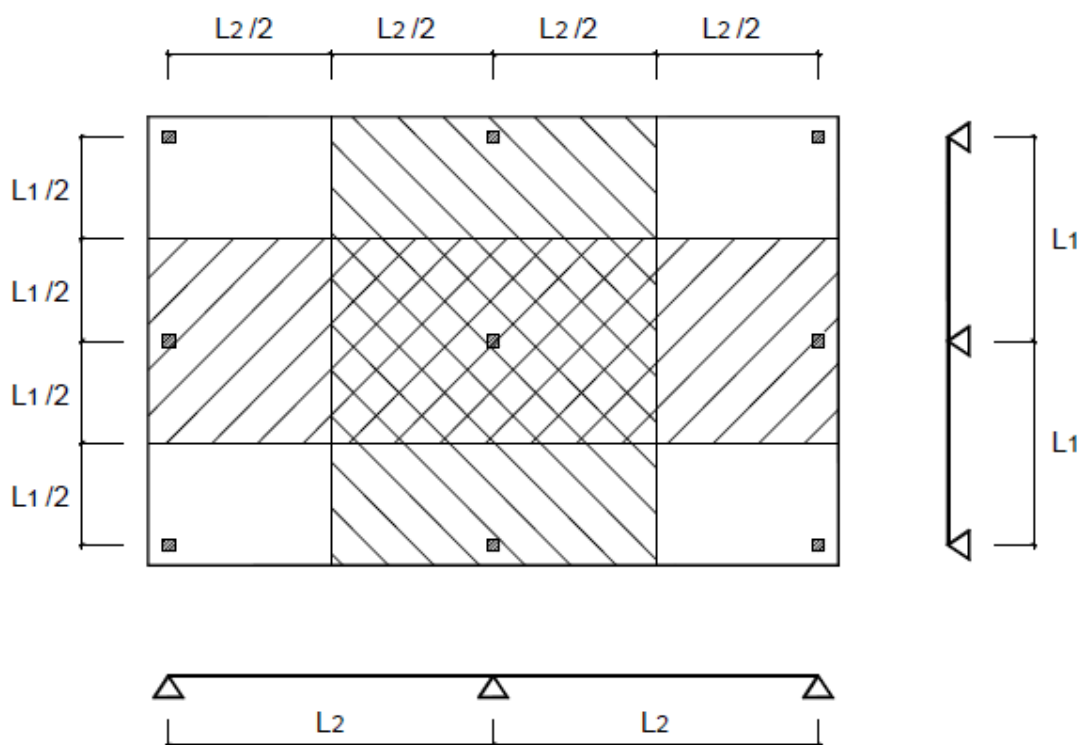


Figura 3.3- Divisão da laje em pórticos ortogonais independentes (Costa 2013)

- b) Determinação das cargas atuantes em cada pórtico. As cargas são aplicadas na sua totalidade para cada pórtico, independentemente. Essas cargas correspondem à largura das suas travessas, multiplicada pelo valor das cargas atuantes na laje por m^2 , E_d .

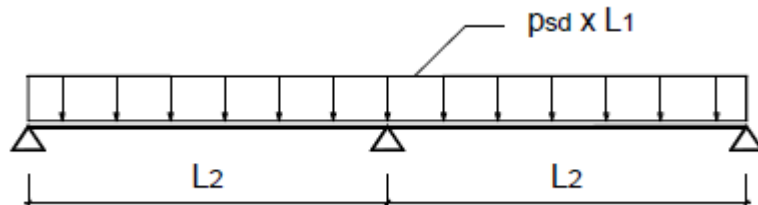


Figura 3.4- Carga a considerar no Pórtico na direção X(Costa 2013)

Para análise das cargas verticais, a rigidez é calculada utilizando a largura total dos painéis, enquanto que para as cargas horizontais se deve utilizar 40% desse valor, de modo a reduzir os momentos fletores transmitidos entre a laje e o pilar.

- c) Com a determinação dos momentos máximos nos apoios e a meio vão referente a cada pórtico, prossegue-se o cálculo com a divisão dos pórticos em faixas sobre os pilares(FP) e faixas centrais(FC), ilustrada na Figura 3.5, em que os momentos serão repartidos conforme indicado no Quadro 3.1.

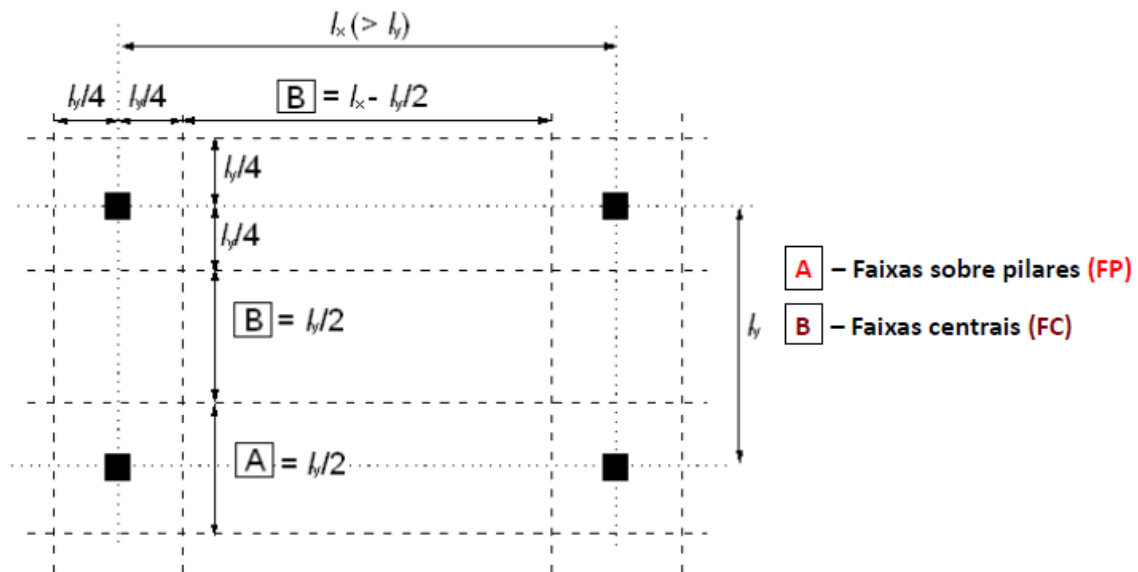


Figura 3.5 - Divisão dos pórticos em faixas(NP EN 1992-1-1 2010)

Quadro 3.1 - Distribuição simplificada dos momentos fletores no caso de uma laje fungiforme (NP EN 1992-1-1 2010)

	Momentos negativos	Momentos positivos
Faixa sobre pilares	60 % - 80 %	50 % - 70 %
Faixa central	40 % - 20 %	50 % - 30 %
<i>NOTA: O total dos momentos negativos e positivos, a resistir conjuntamente pelas faixas sobre pilares e pelas faixas centrais, deverá ser sempre igual a 100 %.</i>		

3.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos constitui atualmente uma das mais refinadas ferramentas de análise estrutural no que diz respeito à aplicação de métodos numéricos em engenharia, permitindo determinar o estado de tensão e de deformação de um sólido sujeito a carregamentos exteriores, podendo ser utilizado na análise de lajes, paredes ou outros tipos estruturais mais complexos.

O método dos elementos finitos consiste na divisão da peça em estudo num número finito de elementos de forma simples e dimensões variadas, denominados elementos finitos, assumindo-se no seu interior leis simples de comportamento, dependentes das variáveis em estudo.

O comportamento de cada elemento finito é descrito por uma função ou um conjunto de funções especialmente escolhidas, que permitem analisar como se comportam as tensões e os deslocamentos dentro daquele elemento, quando o mesmo é submetido a um determinado tipo de ação. São estas funções, conhecidas por funções de forma, que irão indicar a maneira específica de cada elemento se deformar.

Os programas comerciais de cálculo atualmente utilizados em projetos permitem a utilização prática de elementos finitos na análise estrutural. Devido às facilidades incorporadas nestes programas a nível do processamento, a sua utilização nos projetos correntes encontra-se assim facilitada.

Os programas de cálculo atualmente existentes permitem resolver estruturas de grande complexidade e de grandes dimensões, com tempos de cálculos aceitáveis, mesmo considerando um grande conjunto de ações e combinações. Entretanto, o projetista encontra algumas dificuldades na utilização desses programas, tais como:

- Dificuldades de se saber os tipos de elementos finitos utilizados, nomeadamente os graus de liberdade associados e as respetivas funções de forma;
- Dificuldades de identificar a matriz de rigidez associada, nomeadamente identificar se são ou não consideradas as deformações de corte;
- Dificuldades na adaptação de uma discretização adequada ao problema a resolver tendo em conta, o esforço de cálculo, as características do elemento e o campo de deformações que se pretende reproduzir. (Carvalho 2008)

Neste trabalho foi utilizado o programa de cálculo Robot Structural Analysis Professional 2015.

4

METODOLOGIAS PARA O CÁLCULO DE DEFORMAÇÕES – METODOS TRADICIONAIS E EMPREGO DO PRINCIPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Começamos por perceber a principal dificuldade deste trabalho: “A determinação das deformações em peças de betão armado fissurado tendo em conta as combinações de ações, a fluência e a retração do betão leva a cálculo laboriosos e por vezes complexos. As flechas de peças fletidas podem ser calculadas, com generalidade, pela integração numérica das curvaturas dos pequenos troços em que uma viga pode ser dividida.” (Figueiras 2003)

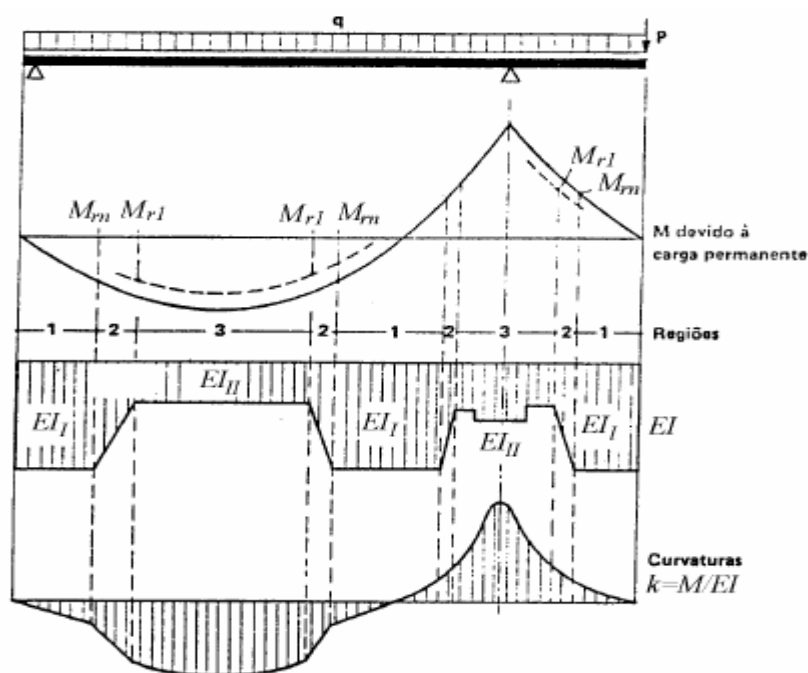


Figura 4.1- Variação da rigidez e da curvatura ao longo de uma viga em função do diagrama de momentos e da rigidez a flexão EI . (Figueiras 2003)

Sendo o objetivo deste trabalho a avaliação de deformações em lajes de betão armado e existindo unicamente ações verticais, as deformações verificadas resultam essencialmente por deformações de

flexão (força normal desprezável), pelo que as metodologias elaboradas no presente capítulo se aplicam apenas a casos de flexão simples.

Neste capítulo serão abordos alguns métodos para o cálculo de deformação a curto e a longo prazo, entrando com os fenómenos imediatos e diferidos no tempo (fluência, retração e fendilhação).

4.1 CURVATURA MÉDIA

A deformada devido aos momentos fletores é obtida pela dupla integração da curvatura ao longo do elemento, tendo em conta as condições fronteira do elemento em causa.

$$y'' = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{d} \quad (4.1)$$

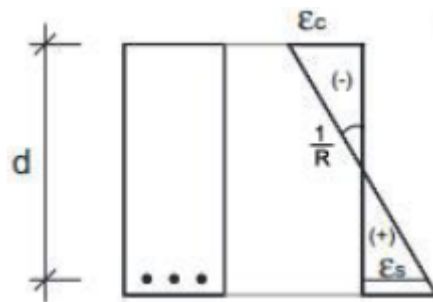


Figura 4.2 - Representação da curvatura, altura útil e as extensões no betão e no aço (Fonte: (Camara 2014))

A curvatura total ao longo do tempo será dado pela soma da curvatura elástica $(1/r)_{ce}$ e das curvaturas devida à fluência $(1/r)_{cc}$ e à retração $(1/r)_{cs}$. Neste fenómeno, toma particular importância o efeito da fendilhação.

$$\left(\frac{1}{r}\right)_t = \left(\frac{1}{r}\right)_{ce} + \left(\frac{1}{r}\right)_{cc} + \left(\frac{1}{r}\right)_{cs} \quad (4.2)$$

As estruturas de betão armado têm o cálculo da sua deformação muito influenciado pelo facto de estarem ou não fendilhadas. Existem outros fenómenos deferidos no tempo, tais como, a retração e fluência, que também influenciam o cálculo dessa deformação. Isto faz com que haja um comportamento descontínuo entre as secções fendilhadas e as secções vizinhas não fendilhadas, pelo que será necessário definir as componentes da expressão em termos médios, consoante ocorra ou não fendilhação. Esta metodologia será explicada nos subcapítulos seguintes.

4.1.1 Efeito da Fendilhação

Devido à grande complexidade da avaliação da relação momento-curvatura de um elemento de betão armado após a fendilhação, a curvatura será avaliada em termos de valores médios.

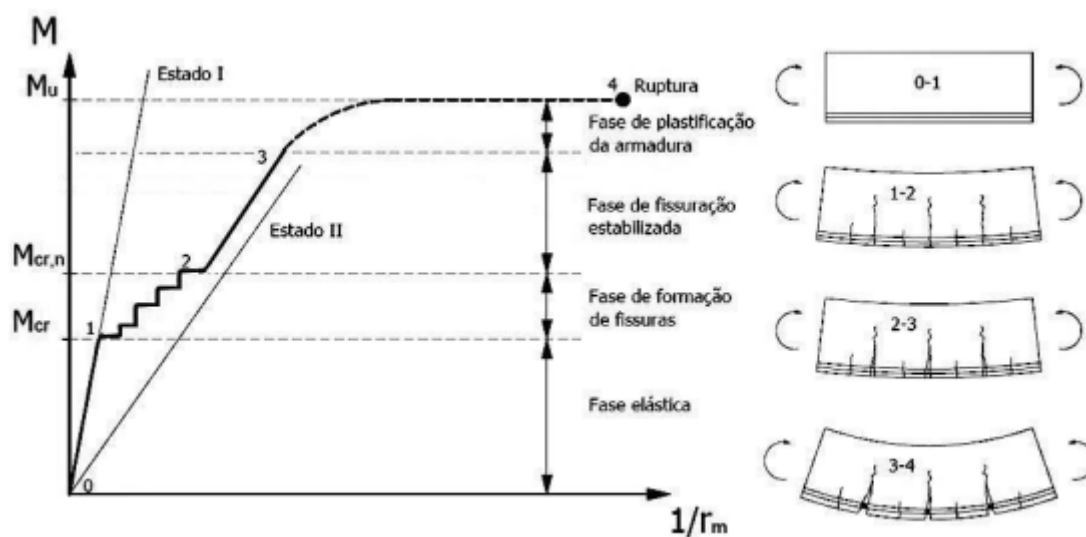


Figura 4.3 - Relação Momento-Curvatura para as varias fases da estrutura no caso de flexão simples (Tavares 2010)

No tramo (0-1) a estrutura comporta-se de modo linear e elástico, até ser atingido o momento de fendilhação (M_{cr}). Ultrapassando o M_{cr} , dá-se início à formação das primeiras fendas (1-2). Nas secções onde aparecem as fendas, o betão deixa de resistir à tração, passando a mesma a ser constituída apenas pelo betão e aço comprimidos e pelo aço tracionado. A este facto corresponde uma diminuição da rigidez e consequentemente um aumento da curvatura. Para esta zona o gráfico apresenta “degraus” que ilustram o incremento de curvatura devido ao aparecimento de cada fenda. No tramo (2-3) onde a fendilhação está estabilizada, o betão não terá condições de formação de novas fendas, visto que a tensão nele instalada entre as mesmas será sempre inferior à tensão média resistente de tração do betão, f_{ctm} (assunto especificado no subcapítulo 4.1.4) – Neste tramo será apenas possível um aumento de largura das fendas já existentes. Entrando no tramo (3-4) dá-se então o início à plastificação das armaduras, atingindo-se a capacidade máxima resistente do elemento, com o consequente aumento de curvatura, até à rotura do mesmo.

Portanto, para o cálculo do deslocamento de uma peça de betão armado em serviço, devido à flexão simples, será feita a avaliação das curvaturas, tendo em conta as fases em que as zonas da estrutura se encontram (expostas na Figura 4.3). Segundo (Favre et al. 1985)(pag. 3.5), devemos considerar para este efeito uma curvatura média definida entre os estados I e II pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{r_m} = \frac{M}{EI_m} = \frac{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}}{d} \quad (4.3)$$

Este assunto será abordado com mais detalhe nos subcapítulos 4.14 e 4.15.

4.1.2 EFEITO DA FLUÊNCIA

O efeito da fluência pode ser definido como um acréscimo da deformação no tempo, sob a ação de um estado de tensão constante, resultante essencialmente da variação de volume da pasta de cimento que envolve os agregados. Em que este depende fundamentalmente dos seguintes aspetos:

- idade do carregamento(t_0);

- período do carregamento (t, t_0);
- humidade relativa do ambiente ($>\text{humidade} \Rightarrow <\text{fluência}$);
- temperatura relativa do ambiente ($>\text{temperatura} \Rightarrow >\text{fluência}$);
- composição do betão;
- consistência do betão;
- forma da secção.

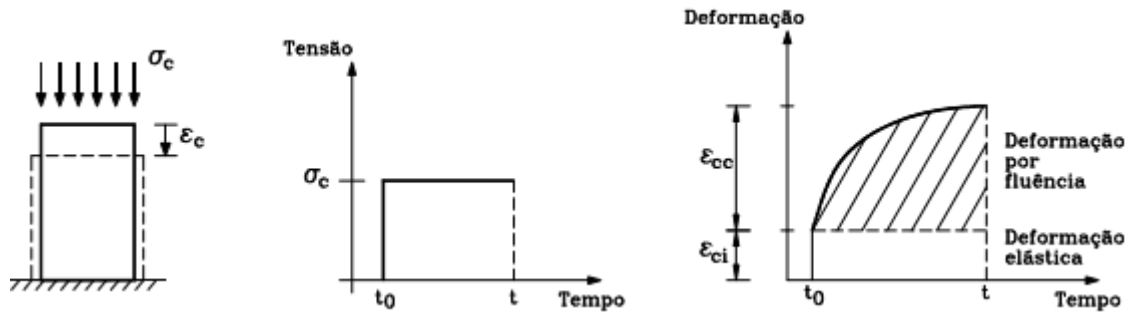


Figura 4.4 - Fluência de um peça de betão (Costa e Appleton 2002)

A deformação total será:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{ci}(t_0) \times \varphi(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c0}} [1 + \varphi(t, t_0)] \quad (4.4)$$

Tal como representa a Figura 4.4, numa peça de betão sujeita a uma tensão de compressão uniforme σ_c dá-se uma deformação inicial instantânea ε_c , designada por deformação elástica. Mantendo a tensão aplicada ao longo do tempo, verifica-se um aumento progressivo do deslocamento inicial. Este acréscimo de deslocamento denomina-se deslocamento devido à fluência, ε_{cc} .

Segundo (Camara 2014), o efeito da fluência pode ser considerado como uma perda de rigidez ao longo do tempo, devido ao abaixamento do módulo de elasticidade.

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c, eff}} \quad (4.5)$$

Sendo,

$$E_{c, eff} = \frac{E_{c0}}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (4.6)$$

A fluência é considerada linear quando a tensão de compressão instalada no betão for menor do que 45% da tensão característica do betão. ($\sigma_c \leq 0.45 f_{ct}$)

A forma de determinação do coeficiente de fluência $\varphi(t, t_0)$ encontra-se explicada no Anexo B do EC2. Nos casos de projeto em que seja difícil a definição dos parâmetros para a determinação da mesma, (Camara 2014) aconselha um coeficiente $\varphi \cong 2.5$.

4.1.3 EFEITO DA RETRAÇÃO

A retração no betão consiste na redução gradual do volume do elemento de betão devido à secagem, auto-dessecação e carbonatação da massa do betão endurecido.

A deformação provocada pela retração é independente do estado de tensão da peça.

- Retração plástica: ocorre na fase de betão fresco, não sendo considerável para efeitos de deformação dos elementos de betão;
- Retração por auto-dessecação ou retração autogénea: está associada à hidratação do cimento, desenvolvendo-se nos primeiros dias da cura do betão;
- A retração por carbonatação: corresponde à reação entre o dióxido de carbono do ar com a pasta de cimento hidratado ao longo do tempo;
- A retração por secagem: ocorre lentamente e resulta da migração da água através do betão endurecido. É a parcela mais importante na deformação por retração do betão.

A retração do betão, depende de alguns fatores, de uma forma semelhante à fluência, dos quais são destacados:

- Humidade e temperatura relativa do ambiente;
- Consistência do betão na altura da betonagem;
- Forma da secção.

Como ilustra a Figura 4.5, a retração, além de afetar o estado de tensão no elemento de betão armado caso esteja inserido numa estrutura hiperestática, também pode contribuir para o incremento da deformação ao longo do tempo.

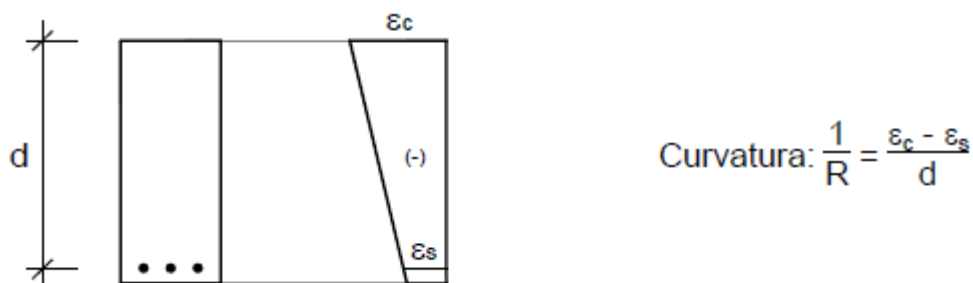


Figura 4.5 - Viga não fendilhada só com armadura inferior (Fonte: (Camara 2014))

Como se pode observar na Figura 4.5, numa peça de betão com distribuição de armadura não simétrica, a deformação por retração é inferior na parte inferior por efeito da restrição da armadura, resultando num incremento da deformação do elemento.

Neste trabalho, este efeito não será tido em consideração.

4.1.4 TRAÇÃO PURA

Neste subcapítulo expõem-se alguns conceitos utilizados na avaliação da curvatura média. Tais conceitos passam pela forma de calcular, quer a distância mínima entre as fendas, quer a contribuição de betão entre as mesmas. Estes cálculos podem ser explicados facilmente no caso de um tirante à tração pura. Se se considerar que o banzo tracionado da viga tem o comportamento de um tirante, o

comportamento do mesmo pode ser generalizado para o estudo do comportamento à flexão. Ilustra-se então, na Figura 4.6, um elemento de betão armado sujeito à tração pura.

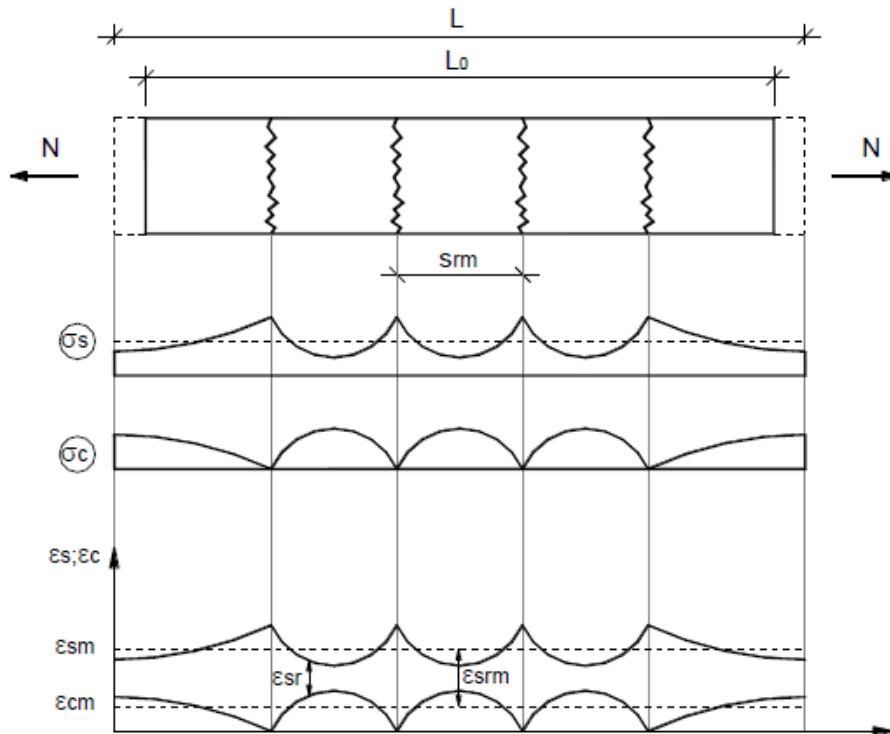


Figura 4.6 - Representação da variação da tensão e extensão média do aço e do betão ao longo dum tirante sujeito à tração pura (Fonte:(Camara 2014)).

Como se pode observar, quando se dá a primeira fenda numa dada zona, ou seja, nessa zona a tensão no betão σ_c atinge o valor da tensão média resistente à tração f_{ctm} , há um equilíbrio da carga num domínio elástico, o que faz com que as cargas que estavam a ser suportadas pelo betão sejam transferidas para a armadura.

Como ilustra a Figura 4.7, devido ao efeito da aderência aço/betão parte da tensão do aço será transferida para o betão novamente, aumentando progressivamente até ser atingida novamente a tensão resistente de tração, formando-se uma nova fenda. A essa distancia entre duas secções fendilhadas dá-se o nome de distância mínima entre fendas.

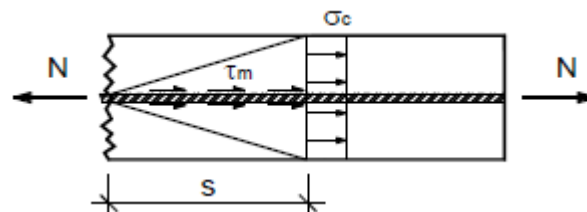


Figura 4.7 - Distância mínima (s) para formação duma nova fenda (Fonte:(Camara 2014))

Uma vez estabilizada a fendilhação, a tensão no betão será sempre inferior à tensão resistente de tração, o que impede a formação de novas fendas, como podemos observar na Figura 4.6. Isto realça a existência de uma distância mínima entre as fendas.

Com isto podemos assim dizer que este elemento de betão armado terá maior rigidez do que esse elemento no estado totalmente fendilhado, visto que há uma contribuição do betão à tração entre fendas para essa rigidez.

A Figura 4.8 idealiza um elemento de betão armado de comprimento l , submetidos a uma força de tração N , em que esse elemento é substituído por um modelo composto por duas partes (Favre et al. 1985):

- Um trabalhando em estado I (secção não fendilhada);
- Outra trabalhando em estado II (secção fendilhada sem contribuição do betão tracionado).

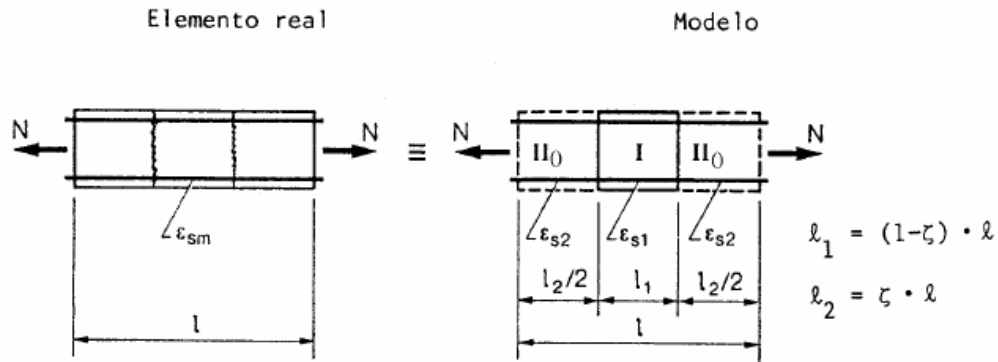


Figura 4.8 - Modelo de cálculo para tração pura (Fonte:(Favre et al. 1985))

Em que a extensão média do aço é dada por:

$$\varepsilon_{sm} = (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_{s1} + \zeta \cdot \varepsilon_{s2} \quad (4.7)$$

Com,

$$(1 - \zeta) = \frac{l_1}{l} \quad (4.8)$$

e

$$\zeta = \frac{l_2}{l} \quad (4.9)$$

A extensão média do betão será:

$$\varepsilon_{cm} = (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_{c1} \quad (4.10)$$

O coeficiente de repartição é obtido por:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \right)^2 = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{N_r}{N} \right)^2 \quad (4.11)$$

$\zeta = 0$ para $\sigma_{s2} < \sigma_{sr}$, ou $N < N_r$

Onde:

- β_1 - coeficiente que tem em conta as propriedades de aderência dos varões ($\beta_1=1.0$ para varões de alta aderência; $\beta_1 = 0.5$ para varões aderência normal)
- β_2 - coeficiente que tem em conta a duração ou repetição das cargas ($\beta_2 = 1.0$ para uma única carga de curta duração; $\beta_2 = 0.5$ para cargas atuando com permanência ou para vários ciclos de cargas); Cargas de longa duração ou repetida fazem com que as propriedades de aderência entre aço-betão sejam, em parte, perdidas.
- $N_r = A_{ci} \cdot f_{ct} \cong A_c \cdot f_{ct}$ - Esforço normal de fendilhação.

4.1.5 FLEXÃO PURA

Para o caso de flexão pura, os pressupostos anteriormente citados referentes na tração pura serão também válidos. Assim sendo, a extensão média no aço e no betão serão calculadas conforme indicado na Figura 4.9, resultando as seguintes expressões:

$$\varepsilon_{sm} = (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_{s1} + \zeta \cdot \varepsilon_{s2} \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_{cm} = (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_{c1} + \zeta \cdot \varepsilon_{c2} \quad (4.13)$$

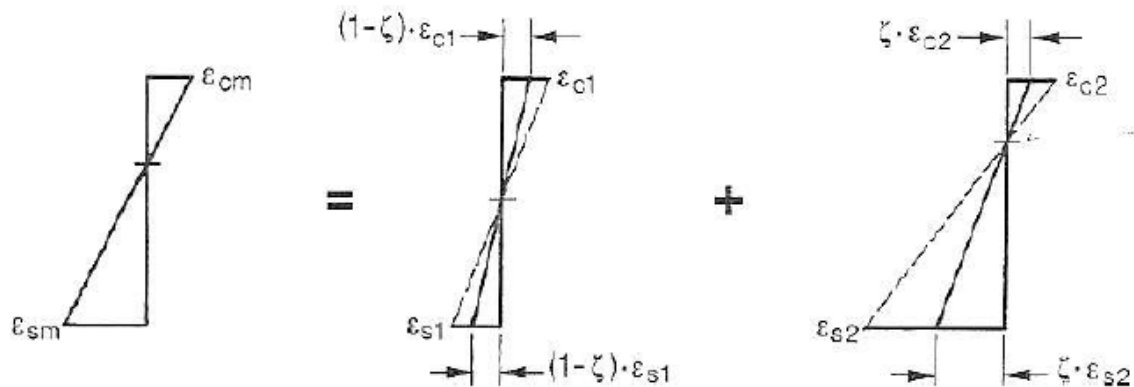


Figura 4.9 - Extensões médias devido à flexão pura (Fonte:(Favre et al. 1985))

Tal como apresentado no subcapítulo anterior, existe um modelo semelhante que simula a contribuição do betão entre fendas, apresentado na Figura 4.10 (Favre et al. 1985):

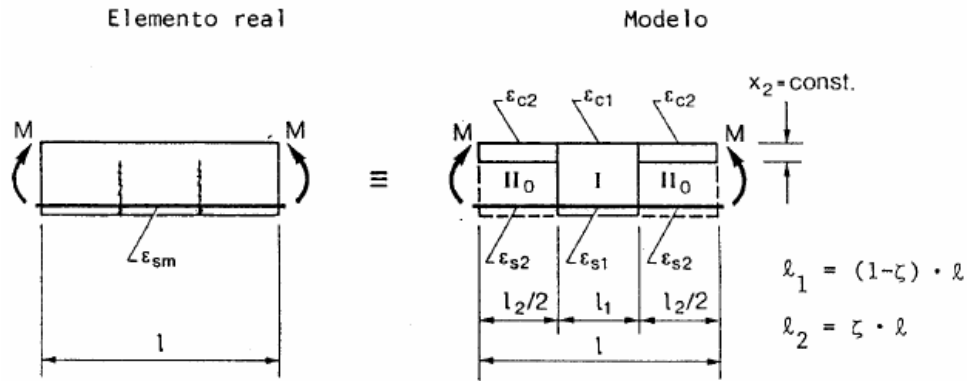


Figura 4.10 - Modelo de cálculo para flexão simples (Fonte:(Favre et al. 1985))

Os comprimentos das zonas do estado I e II são descritos conforme as expressões a baixo indicam, dependendo do nível de momento aplicado, ou seja, para $M > M_{cr}$. Sendo que, quando $M < M_{cr}$, a peça se encontra numa fase elástica considerando $\zeta = 0$, o que leva $l_1 = l$ e $l_2 = 0$.

$$l_1 = (1 - \zeta) \cdot l \quad (4.14)$$

$$l_2 = \zeta \cdot l \quad (4.15)$$

Das expressões (4.1), (4.12) e (4.13) chega-se à seguinte expressão para a curvatura média:

$$\frac{1}{r_m} = (1 - \zeta) \cdot \frac{1}{r_I} + \zeta \cdot \frac{1}{r_{II}} \quad (4.16)$$

O coeficiente de repartição ζ é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \zeta &= 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \right)^2 = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_r}{M} \right)^2 \\ &= 0 \text{ para } \sigma_{s2} < \sigma_{sr}, \text{ ou } M < M_r \end{aligned} \quad (4.17)$$

Sendo:

- M – Momento atuante para a combinação quase-permanente;
- M_r – Momento de fendilhação do betão.

Em, que $\frac{1}{r_I}$ e $\frac{1}{r_{II}}$ representam as curvaturas referentes aos estados I e II.

Portanto, conhecendo a expressão (4.13) referente à curvatura média podemos então calcular a deformação(a) de um elemento de uma estrutura linear por integração da mesma aplicando o teorema dos trabalhos virtuais (ver Figura 4.11) a partir da seguinte expressão:

$$a = \int \frac{1}{r_m} \cdot \bar{M} \cdot dx \quad (4.18)$$

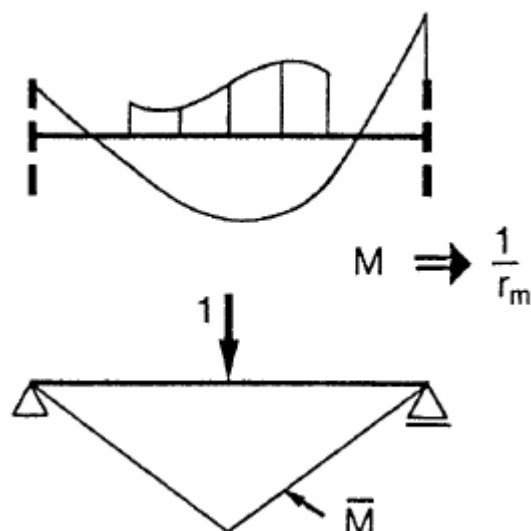


Figura 4.11 - Teorema dos trabalhos virtuais aplicado ao cálculo da flecha (Fonte:(Favre et al. 1985))

Para calcular a flecha deve-se assim proceder à determinação dos seguintes valores:

- Determinação da rigidez à flexão EI para o estado I e II;
- Determinação do diagrama de momentos para o carregamento cuja flecha queremos calcular;
- Determinação do diagrama resultante da força unitária aplicada no ponto onde queremos obter a flecha;
- Determinação da curvatura $1/r$ para os estados I e II dividindo a viga em troços iguais de comprimento finito e determinando para cada troço essa curvatura;
- Determinação da curvatura média referente a cada troço a partir da expressão (4.16), associando ao coeficiente distribuição do mesmo calculado pela expressão (4.17);
- Calcular a contribuição de cada troço aplicando expressão (4.18) fazendo uma integração numérica e por fim somar a contribuição de cada troço obtendo a flecha final.

Para mais fácil aplicação, do método será aconselhável o uso de uma folha de cálculo para executar a integração acima referida, por meio de somatório da contribuição de cada troço.

4.2 MÉTODO BILINEAR

O método bilinear é um método simplificado que está limitado ao cálculo de flechas. Este método baseia-se no facto de que, em serviço, a relação momento-flecha pode ser aproximada por meio de uma lei bilinear conforme indicado na Figura 4.12.

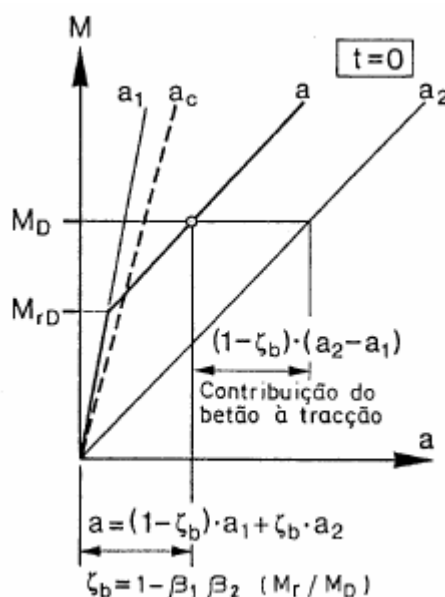


Figura 4.12 - Relação Bilinear momento-flecha (Fonte:(Figueiras 2003))

Este método consiste em calcular os valores extremos a_1 e a_2 da flecha nos estados I e II (Figura 4.12), a partir da flecha base a_c (resultado do cálculo elástico, tendo em conta apenas a contribuição do betão Elc- rigidez da secção bruta do betão).

Segundo (Favre et al. 1985)(p. 3.17), consideram-se algumas simplificações:

- A distribuição dos momentos atuantes no estado limite de utilização será semelhante à distribuição de momentos elásticos; desta forma, toma-se como simplificação a distribuição de momentos elásticos;
- O cálculo do coeficiente de distribuição ζ é calculada apenas para as secções consideradas determinantes, sendo que na realidade, este varia ao longo do elemento. Também os valores dos momentos atuantes, momento fendilhação e todos os fatores corretivos da curvatura elástica $1/rc$ são calculados para as secções determinantes;
- O cálculo das deformações “ a_1 ” e “ a_2 ” correspondentes ao estado I e II é feita tendo como base as características da secção determinante. Não se considera para o cálculo o efeito da variação da quantidade de armadura ao longo do elemento.

Para perceber melhor o método, comecemos por analisar a avaliação das curvaturas nos Estados I e II:

4.2.1 CÁLCULO DA CURVATURA EM ESTADO I

Nesta fase, a influência da armadura não é muito significativa na deformação das estruturas de betão armado, quer a curto prazo, quer no que diz respeito aos efeitos diferidos no tempo (fluência e retração), apesar de, na realidade, contribuir para aumentar um pouco a rigidez da secção.

Segundo (Camara 2014) pag.214, cada um desses efeitos foi matematicamente expresso e representado graficamente em trabalhos da Comité Europeu do Betão (CEB).

A curvatura referente ao estado I (não fendilhado) é dada pela seguinte expressão (Favre et al. 1985):

$$\frac{1}{r_I} = k_{s1} \times \frac{1}{r_c} + k_{\varphi 1} \times \varphi \times k_{s1} \times \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_{cs1}} \quad (4.19)$$

Onde,

- $\frac{1}{r_I}$ - Curvatura base elástica: $\left(\frac{1}{r_c} = \frac{M}{E_c I_c}\right)$
- k_{s1} - Coeficiente que considera a ação das armaduras, a curto prazo, sendo naturalmente inferior a 1, e tanto menor quanto maior a % de armadura;
- φ - Coeficiente de fluência que dá o incremento da deformação de curto prazo, se não houvesse armaduras;
- $k_{\varphi 1}$ - Coeficiente que quantifica o grau de restrição que a armadura oferece ao incremento de deformação por fluência do betão (efeito equivalente ao k_{s1} , mas agora respeitante ao incremento de deformação a longo prazo);
- $\left(\frac{1}{r_{cs1}} = k_{cs1} \times \frac{\varepsilon_{cs}}{d}\right)$ - Esta parcela é independente das restantes, dado que é independente do carregamento aplicado, e permite a avaliação da curvatura por retração, que depende, no essencial, da maior ou menor simetria na distribuição das armaduras na secção.

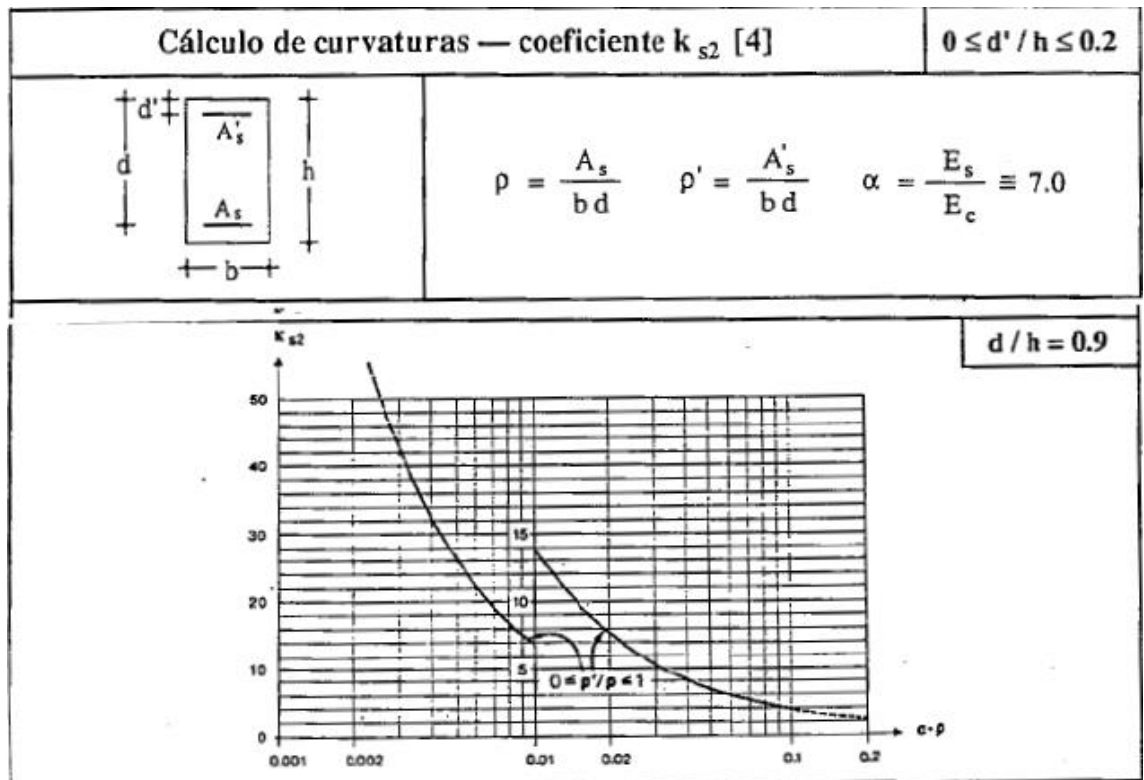
4.2.2 CÁLCULO DA CURVATURA EM ESTADO II

Para o estado II, em que se considera secção fendilhada, sem qualquer contribuição do betão à tração, a expressão é considerada semelhante, considerando as mesmas hipóteses e definindo coeficientes semelhantes. Assim, a expressão referente ao estado II será da seguinte forma (Favre et al. 1985):

$$\frac{1}{r_{II}} = k_{s2} \times \frac{1}{r_c} + k_{\varphi 2} \times \varphi \times k_{s2} \times \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_{cs2}} \quad (4.20)$$

Em que, $\left(\frac{1}{r_{cs2}} = k_{cs2} \times \frac{\varepsilon_{cs}}{d}\right)$

Chama-se a atenção para o facto de que neste estado o valor referente ao parâmetro k_{s2} , é superior a 1, visto que representa a relação entre a curvatura do estado II com a avaliada, considerando apenas a secção de betão como se mostra na Figura 4.13.


 Figura 4.13 - Ábaco correspondente ao coeficiente k_{s2} (Fonte: (Favre et al. 1985)).

Os ábacos para a determinação dos coeficientes são apresentados no anexo A.

Para aplicação do método bilinear, conhecendo as características dos materiais que constituem o elemento de betão armado, bem como a distribuição de armaduras, é possível determinar os coeficientes atrás referidos para as secções determinantes, através dos abacos apresentado no Anexo A1, retirados de (Favre et al. 1985).

- i. Cálculo dos coeficientes
 $k_{s1}, k_{\phi 1}, k_{cs1}$ e $k_{s2}, k_{\phi 2}, k_{cs2}$
- ii. Cálculo do coeficiente de repartição, ζ
 Toma-se um momento intermédio na zona fendilhada para efeitos da avaliação do coeficiente distribuição ζ , sendo este constante, dado pela seguinte expressão:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_r}{M} \right)^2 = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_{rD}}{M_D} \right) \quad (4.21)$$

Onde que,

- $M = \sqrt{M_{rD} \cdot M_D}$
- $M_r = M_{rD}$, momento de fendilhação, igual para todas secções;
- M_D , momento calculado para a secção determinante;
- β_1 e β_2 , descritos já anteriormente.

(Camara 2014) chama a atenção da ponderação do coeficiente de distribuição visto que o cálculo da flecha depende não só da curvatura no vão, mas também dos valores dos momentos sobre os apoios. Sendo assim, podemos considerar os seguintes exemplos:

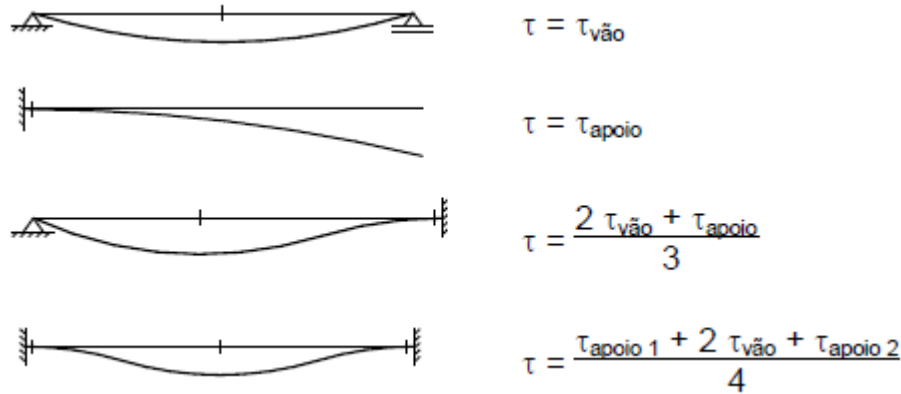


Figura 4.14 - Ponderação do coeficiente de distribuição ζ , consoante as condições de apoio (Fonte:(Camara 2014))

iii. Cálculo da flecha

Das equações (4.16) e (4.18), resulta que a deformação de um elemento de betão armado é dada pela seguinte expressão:

$$a = (1 - \tau) \int_0^L \frac{1}{r_I} \bar{M} dx + \tau \int_0^L \frac{1}{r_{II}} \bar{M} dx \Leftrightarrow a = (1 - \tau) a_I + \tau a_{II} \quad (4.22)$$

Onde os valores extremos a_I e a_{II} resultam das equações (4.19) e (4.20), em que os coeficientes são constantes, calculados para a secção determinante e dados pelas expressões seguintes:

$$a_I = k_{s1} (1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi) \int_0^L \frac{1}{r_c} \bar{M} dx + k_{cs1} \frac{\varepsilon_{cs}}{d} \int_0^L \bar{M} dx \quad (4.23)$$

$$a_{II} = k_{s2} (1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi) \int_0^L \frac{1}{r_c} \bar{M} dx + k_{cs2} \frac{\varepsilon_{cs}}{d} \int_0^L \bar{M} dx \quad (4.24)$$

Nestas expressões, a parcela do integral da curvatura elástica corresponde à deformada elástica a_c , considerando apenas a contribuição do betão.

4.3 MÉTODO DOS COEFICIENTES GLOBAIS

O método dos coeficientes globais é uma simplificação do método bilinear. Este método, consiste em calcular uma aproximação da flecha real a partir da flecha elástica a_c (calculada elasticamente apenas com a contribuição do betão), corrigido por meio de coeficientes globais k , que visam entrar com os efeitos da armadura, da fendilhação e da fluência. (Favre et al. 1985)

Estes coeficientes são derivados do método bilinear, admitindo algumas simplificações ((Favre et al. 1985), pag 3.26):

- Assume-se que $d'/h=0,1$;
- Para K_0 assume-se que o rácio $\rho'/\rho=0,25$;
- $\beta_1=1$ (armadura de alta aderência).
 d' - distância a armadura de compressão;
 h - Altura da secção transversal da peça;
 ρ' - percentagem das armaduras de compressão;
 ρ - percentagem das armaduras de tração;
 β_1 - coeficiente que tem em conta as propriedades de aderência dos varões.

Neste método, a retração não é considerada, pelo que as equações (4.23) e (4.24) são dadas por:

$$a_I = k_{s1}(1 + k_{\varphi 1}\varphi) \int_0^L \frac{1}{r_c} \bar{M} dx \quad (4.25)$$

$$a_{II} = k_{s2}(1 + k_{\varphi 2}\varphi) \int_0^L \frac{1}{r_c} \bar{M} dx \quad (4.26)$$

Assim sendo, para curto prazo, (Favre et al. 1985), apresenta a expressão (4.22) da seguinte forma:

$$a_0 = [(1 - \zeta) \cdot K_{s1} + \zeta \cdot K_{s2}] \cdot a_c = k_0 \cdot a_c \quad (4.27)$$

Para longo prazo, a expressão da flecha é dada por:

$$a_t = [(1 - \zeta) \cdot (1 + \varphi \cdot K_{\varphi 1}) \cdot K_{s1} + \zeta \cdot (1 + \varphi \cdot K_{\varphi 2}) \cdot K_{s2}] \cdot a_c = \eta \cdot k_t \cdot a_c \quad (4.28)$$

Em que,

- k_0 - Coeficiente global de correção que entra em consideração com o efeito das armaduras e da fendilhação (função de $\alpha\rho$, M_{cr}/MD , h/d);
- k_t - Coeficiente global de correção que entra em consideração com o efeito das armaduras, da fendilhação e da fluência (função de ϕ , $\alpha\rho$, M_{cr}/MD , h/d), em que α é sempre avaliado com o módulo de elasticidade instantâneo do betão;
- η - Coeficiente que entra em consideração com a influência da armadura de compressão (função de ρ'/ρ , $\alpha\rho$). A armadura de compressão aumenta a rigidez, o que implica uma curvatura menor. Portanto, na maioria dos casos para longo prazo, esse coeficiente reduz em média entre 5-10% da curvatura. A curto prazo o fator k_0 já considera a armadura de compressão, por isso esse fator só entra para o cálculo de k_t .

$\alpha=Es/Ec$ - Coeficiente de homogeneização;

ρ , M_{cr} , MD , h – já referidas anteriormente;

d - altura útil da armaduras à tração;

ϕ - diâmetro da armadura;

(Favre et al. 1985), p. 3.31-3.32, apresenta um conjunto de ábacos para a determinação dos coeficientes globais de correção k_0 e k_t , dependendo da relação h/d . Segundo (Favre et al. 1985), essa relação h/d que apresenta o posicionamento da armadura de tração, varia com a terceira potência, simplificando os coeficientes para um único ábaco com $h/d=1$.

Sendo assim, para entrar com o efeito do posicionamento das armaduras, haverá uma alteração nas equações (4.27) e (4.28) dado pelas seguintes expressões:

Para curto prazo:

$$a_0 = k_0 \cdot \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot a_c \quad (4.29)$$

Para longo prazo:

$$a_t = \eta \cdot k_t \cdot \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot a_c \quad (4.30)$$

Apresenta-se na Figura 4.15 abaixo indicada, o ábaco correspondente aos valores de k_0 .

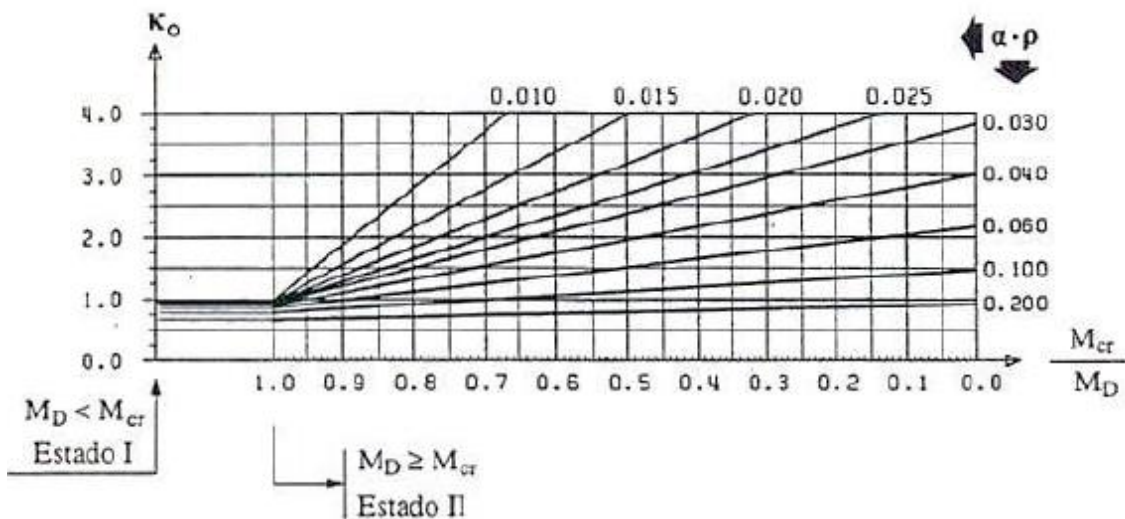


Figura 4.15 - Abaco correspondente ao coeficiente k_0 para o primeiro carregamento e para $h/d=1$

(Fonte:(Favre et al. 1985))

Apresenta-se na Figura 4.16 o ábaco correspondente aos valores do coeficiente k_t . No estudo da deformação de uma laje, para quantidades de armaduras correntes, é usual com este método obter valores para a flecha a longo prazo entre 3 a 7 superiores aos obtidos para a flecha elástica (Brandão 2013).

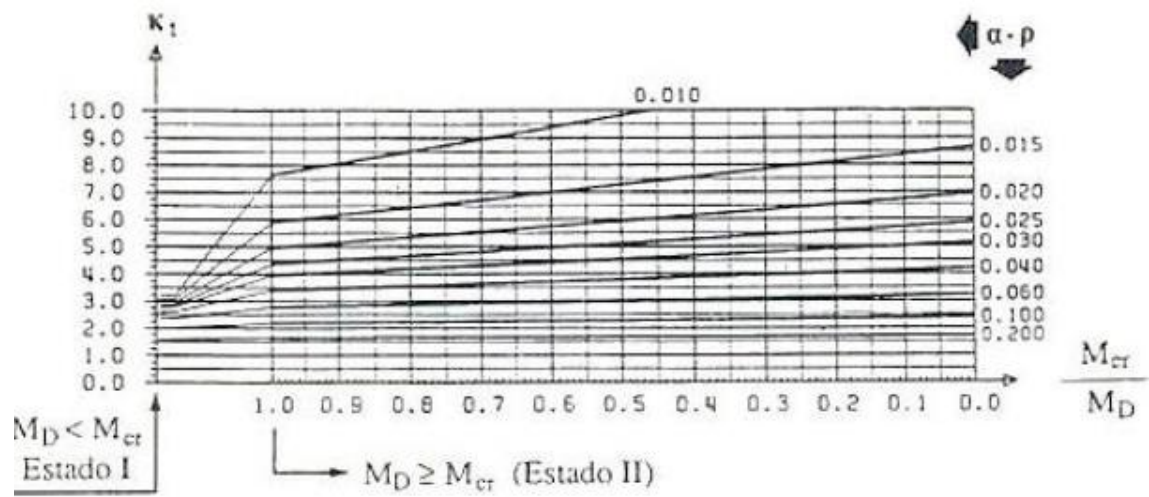


Figura 4.16 - Abaco correspondente ao coeficiente global K_t para $h/d=1$ e $\phi=2.5$ (Fonte:(Favre et al. 1985))

5

CÁLCULO DE DEFORMAÇÕES EM LAJES FUNGIFORMES EM AMBIENTE BI-DIMENSIONAL DE ACORDO COM DISPOSIÇÕES DO EC2

5.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo pretende-se sistematizar um método a utilizar no cálculo da deformação de lajes fungiformes, de acordo com o método mais rigoroso proposto no EC2. Este método será desenvolvido num ambiente bidimensional, limitando as ações a ações verticais e incluindo os efeitos da fendilhação e da fluência. Não se considera neste estudo o efeito da retração.

A maior dificuldade será a transição do método aplicado num ambiente unidirecional, no caso mais simples, (vigas) para um ambiente bidirecional (lajes). Serão expostas nos subcapítulos seguintes as simplificações tidas em conta no desenvolvimento do método e a descrição e exemplificação do mesmo, aplicado a uma viga e posteriormente a uma laje fungiforme.

5.2 MÉTODO DE CÁLCULO RIGOROSO INDICADO PELO EC2

Para o cálculo rigoroso da flecha, segundo (NP EN 1992-1-1 2010), devem considerar-se como não fendilhados os elementos para os quais as tensões resultantes dos esforços atuantes não ultrapassem em qualquer ponto do elemento a resistência do betão à tração. Para os elementos em que as tensões resultantes dos esforços atuantes ultrapassem a resistência à tração do betão, deve ser considerado um estado intermédio entre o comportamento não fendilhado e totalmente fendilhado, calibrado por um coeficiente de distribuição designado por ζ . Em elementos em que a solicitação predominante é a flexão, o (NP EN 1992-1-1 2010) indica como sendo adequado prever o comportamento desse elemento de acordo com a seguinte expressão:

$$\alpha = \zeta\alpha_{II} + (1 - \zeta)\alpha_I \quad (5.1)$$

Em que

- α — Parâmetro de deformação considerado que poderá ser, por exemplo, uma extensão, uma curvatura ou uma rotação. (Como simplificação, α também poderá representar uma flecha);

- αI , αII – Valores do parâmetro calculado, respetivamente, para os estados não fendilhado e totalmente fendilhado;
- ζ – Coeficiente distribuição (que tem em conta a contribuição do betão tracionado entre fendas) obtido pela expressão (5.2):

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 = 1 - \beta \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \quad (5.2)$$

- $\zeta = 0$, para secções não fendilhadas;
- β - Coeficiente que tem em conta a influência na extensão media da duração do carregamento ou da repetição do carregamento:
= 1,0 para um único carregamento de curta duração;
= 0,5 para um carregamento de longa duração ou para repetidos carregamentos;
- σ_s - Tensão nas armaduras de tração, calculada na hipótese de secção fendilhada;
- σ_{sr} - Tensão nas armaduras de tração, calculada na hipótese de secção fendilhada sujeita às condições de carregamento que provocam o inicio da fendilhação;
- M_{cr} - Momento de fendilhação.

Segundo (NP EN 1992-1-1 2010), o método mais rigoroso para a determinação das flechas através da expressão (5.1), consiste em calcular a curvatura em várias secções ao longo do elemento e em seguida calcular a flecha por integração numérica, somando a contribuição da zona de influência de cada secção.

Nos subcapítulos seguintes serão apresentados um exemplo da aplicação do método a uma viga (elemento unidimensional), por forma a perceber-se melhor a sua aplicação, sendo posteriormente apresentado um exemplo de aplicação ao cálculo de flechas em lajes fungiformes (elementos bidimensionais)

5.3 EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO A UMA VIGA DE BETÃO ARMADO

Considerou-se uma viga contínua de dois tramos, sendo um deles em consola, sujeita às ações constituídas por cargas uniformemente distribuídas (valores característicos) conforme ilustrada na Figura 5.1. A viga apresenta uma secção retangular 0,5x0,3m² e está armada conforme representado na figura 5.1.

Dados: C25/30 ($\phi(\infty,28) = 2.5$, $\chi = 0.8$), A500, Ambiente da classe de exposição XC1

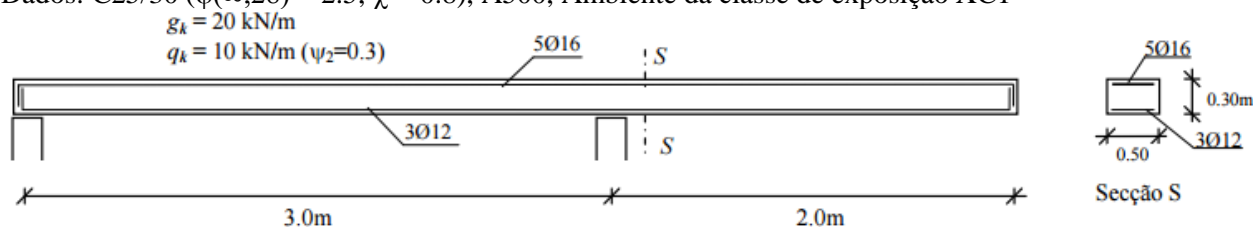


Figura 5.1 - Exemplo de uma viga de dois tramos em continuidade, um dos quais em consola

Pretende-se calcular a flecha máxima na extremidade da consola para a combinação quase-permanente de ações, usando o método mais rigoroso do EC2.

Para tal, aplicar-se-á a expressão (5.1), em que o parâmetro α representa a curvatura média e α_1 e α_2 representam as curvaturas referentes ao estado I (não fendilhado) e estado II (totalmente fendilhado):

$$\frac{1}{r_m} = (1 - \zeta) * \frac{1}{r_1} + \zeta * \frac{1}{r_2}$$

As curvaturas referentes aos estados I e II são dadas pela expressão (4.1):

$$\frac{1}{r_1} = \frac{M}{E_{c,eff} * I_1}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{M}{E_{c,eff} * I_2}$$

E o coeficiente de distribuição é dado pela expressão (5.2):

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \text{ com, } \beta = 0.5 \text{ (Carregamento de longa duração)}$$

Finalmente, a flecha máxima na extremidade da consola será calculada aplicando a expressão (4.18), por integração numérica, com auxílio de uma folha de cálculo desenvolvida em Excel e que será apresentada mais à frente.

Neste caso, essa integração numérica representa o cálculo de uma área, que será calculada da seguinte forma:

- 1) A viga é dividida num número de secções equidistantes, sendo que quanto maior for o número de secções consideradas menor será o erro do resultado.
- 2) Para cada secção determinar: A_s , M , M_1 , I_1 , I_2 , ζ , $1/r_1$, $1/r_2$, $1/r_m$;
 - A_s - quantidade de armadura de tração por metro de largura;
 - M - momento resultante da carga para a qual queremos calcular a flecha;
 - M_1 - momento devido à carga unitária aplicada no ponto em que se quer calcular a flecha;
 - I_1 - inércia considerando a secção não fendilhada;
 - I_2 - inércia considerando a secção totalmente fendilhada;
 - ζ , $1/r_1$, $1/r_2$, $1/r_m$, já referidos anteriormente.
- 3) Calcula-se o contributo de cada secção, dado por: $1/r_m * M_1 * \Delta x$
 - Δx - comprimento correspondente a cada secção em que a viga foi dividida
- 4) Por fim, fazer o somatório das contribuições de cada secção, obtendo assim a flecha máxima.

Passa-se em seguida a explicar os cálculos efetuados:

- Cálculo do diagrama de momentos para a combinação quase-permanente e para a carga unitária aplicada na extremidade da consola:

$$g_k = 20 \text{ kN/m} \quad q_k = 10 \text{ kN/m} (\psi_2 = 0.3)$$

$$Ed = Gk + \sum \psi_2 Qk = 20 + 0.3 \times 10 = 20 + 3 = 23.0 \text{ kN/m}$$

Visto que o objetivo é calcular a flecha máxima na extremidade da consola, utilizou-se a combinação representada na figura abaixo:

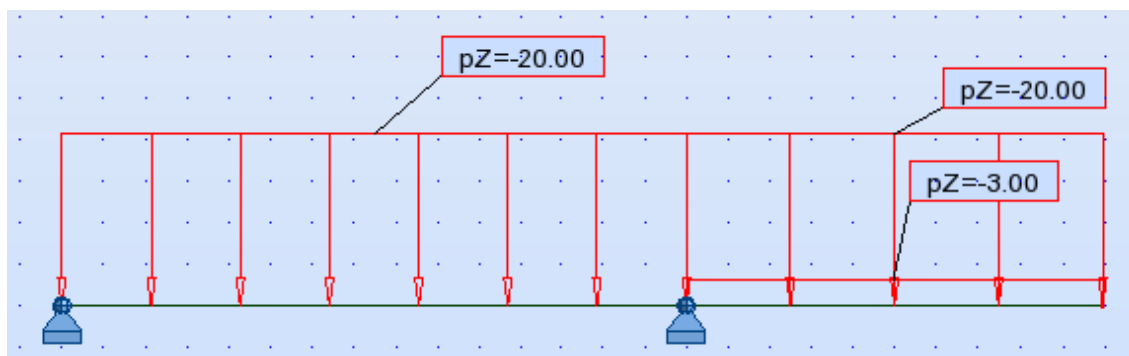


Figura 5.2 - Distribuição das cargas para a combinação quase-permanente

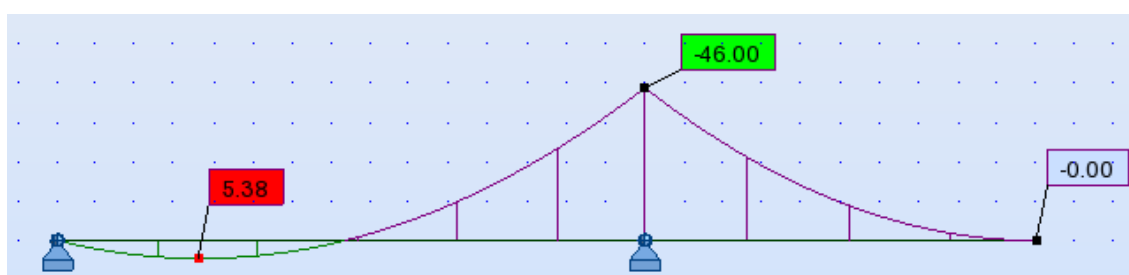


Figura 5.3 - Diagrama de momentos para a combinação quase-permanente

Carga unitária aplicada na extremidade da consola e o respetivo diagrama de momentos (M1):

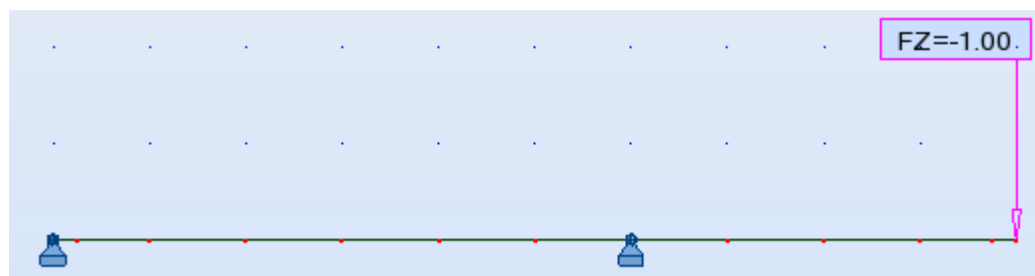


Figura 5.4 - Aplicação da carga unitária na extremidade da consola

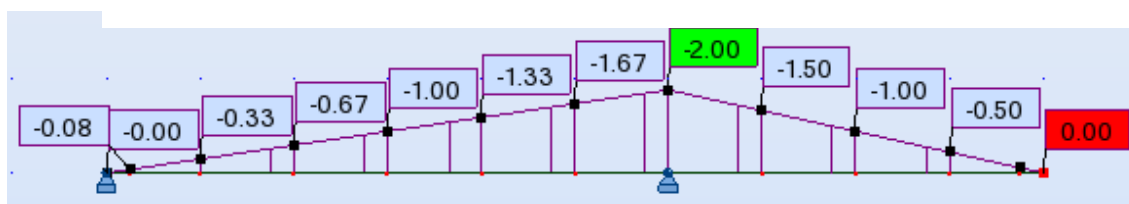


Figura 5.5 - Diagrama de momento resultante da carga unitária

A viga foi dividida em varias secções com 0.5m de comprimento (Δx) (0.25 m nos extremos). Utilizando o programa de cálculo automático já referido, calcularam-se e transferiram-se os momentos instalados em cada secção para a folha de cálculo em Excel, conforme ilustrado no Quadro 5.1.

- Cálculo de M_{cr} :
 Secção: 0.5×0.3 C25/30
 $f_{ctm}((NP\ EN\ 1992-1-1\ 2010)) = 2.6\text{Mpa} = 2600\text{Kpa}$

$$M_{cr} = \frac{f_{ctm} \times b \times h^2}{6} = \frac{2600 \times 0.3 \times 0.5^2}{6} = 19.5 \text{ kN.m}$$

– Cálculo $E_{c,eff}$:

$$E_{cm} = 31 \text{ GPa} \quad \varphi(\infty, 28) = 2.5$$

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi} = \frac{31}{1 + 2.5} = 8.86 \text{ GPa}$$

– Cálculo das Inércias: As inércias referentes aos estados I e II foram calculadas com auxílio de uma folha de cálculo em Excel com base nas matérias das disciplinas de Resistência dos Materiais I e II e Estruturas de Betão I e II.

Para este exemplo, visto que a secção é constante ao longo da viga, será apenas necessário calcular duas inércias referentes aos estados I e II.

Considerando o módulo de elasticidade do aço:

$$E_s = 200 \text{ GPa} \Rightarrow \alpha = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{200}{8.86} = 22.57$$

E a quantidade e o posicionamento das armaduras conforme ilustrada na Figura 5.1

Recobrimentos: $a = 4 \text{ cm}$

Altura útil: $d = 0.26 \text{ m}$

Vem então:

$$I_1 = I_{ci} = 0,001404 \text{ m}^4 \quad \text{e} \quad I_2 = I_{cr} = 0,000541 \text{ m}^4$$

Tendo os dados necessários, prossegue-se para os cálculos conducentes à obtenção da flecha máxima, conforme ilustrado no quadro a seguir:

Quadro 5.1 - Folha de cálculo da flecha na extremidade da viga em estudo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Mcr =	19,5	kN.m		Ec,eff =	8,86	Gpa		
2									
3	Ici =	0,001404	m4						
4									
5	Icr =	0,000541	m4						
6									
7	Ponto	Mi	M*i	ζ	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm x M*i x Δxi	
8	1	4,8	-0,33	0	0,00039	0,00100	0,00039	-0,000064	
9	2	4,7	-0,67	0	0,00038	0,00098	0,00038	-0,000127	
10	3	-0,5	-1	0	-0,00004	-0,00010	-0,00004	0,000020	
11	4	-10,67	-1,33	0	-0,00086	-0,00223	-0,00086	0,000570	
12	5	-25,83	-1,67	0,72	-0,00208	-0,00539	-0,00444	0,003712	
13	6	-46	-2	0,91	-0,00370	-0,00960	-0,00907	0,009067	
14	7	-25,9	-1,5	0,72	-0,00208	-0,00540	-0,00446	0,003347	
15	8	-11,5	-1	0	-0,00092	-0,00240	-0,00092	0,000462	
16	9	-2,87	-0,5	0	-0,00023	-0,00060	-0,00023	0,000058	
17							Σ=	0,017045	m

Obtendo-se assim a flecha na extremidade da consola igual a 1.7 cm.

5.4 DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DO MÉTODO EM AMBIENTE BIDIRECIONAL

Para aplicação do método baseado nos princípios expostos no EC2 a um ambiente bidirecional, neste caso numa laje fungiforme, o cálculo será efetuado separadamente para as duas direções ortogonais, sendo o resultado final obtido somando o contributo dessas duas direções x e y .

Assim sendo, o cálculo da flecha para este cenário será efetuado por meio de um integral estendido sobre uma superfície, resultante da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, em que esta flecha é representada no fundo por um volume, calculado da seguinte forma:

- 1) A partir de um programa de cálculo adequado, dividir a laje em vários elementos finitos (quanto menores, menor será o erro associado ao resultado final);

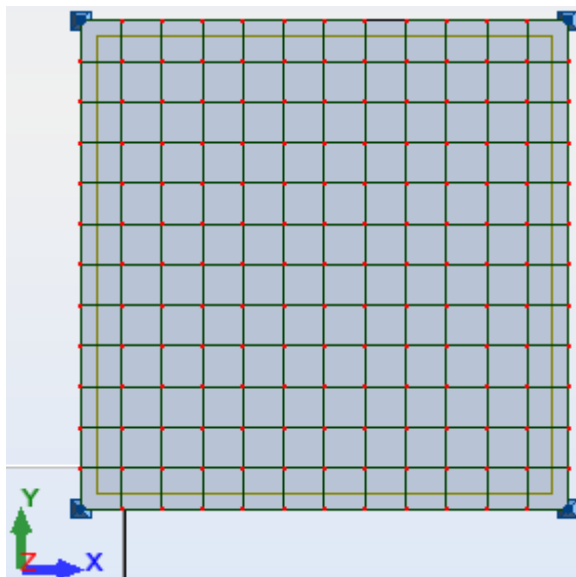


Figura 5.6 - Painél 6x6 m2 dividido em elementos finitos 0.5x0.5 m2

- 2) Dimensionar as armaduras na laje referentes aos esforços nas duas direções e posteriormente definir as zonas de secções semelhantes para cada direção;

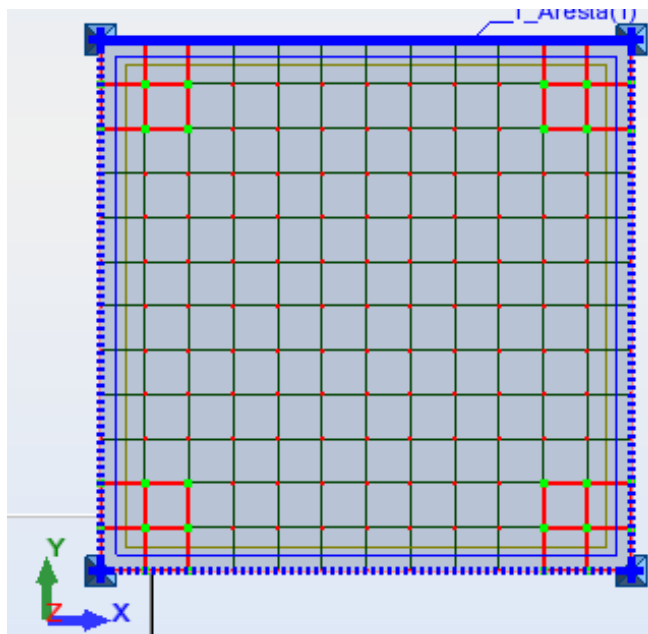


Figura 5.7 - Painel 6x6 Definidos as zonas de secções iguais

- 3) Determinar o M_{cr} e $E_{c,eff}$ (para deslocamento a curto e longo prazo);
- 4) Para cada elemento finito definido e para cada direção, exportar do programa de cálculo utilizado: M_x , M_y , M_{1x} , M_{1y} , A ;
 M_x - momento fletor por metro de largura que permite calcular a armadura a colocar na direção x resultante da carga para a qual se quer o deslocamento (notar que não corresponde ao vector-momento orientado segundo x)
 M_y – momento fletor por metro de largura que permite calcular a armadura a colocar na direção y resultante da carga para a qual se quer o deslocamento
 M_{1x} - momento fletor por metro de largura atuante na direção x , resultante da carga unitária aplicado ao ponto onde se quer o deslocamento
 M_{1y} - momento fletor por metro de largura atuante na direção y , resultante da carga unitária aplicado ao ponto onde se quer o deslocamento
 A - Área do elemento finito definido.
- 5) Para cada zona de secção semelhantes e cada direção, determinar: I_{1x} , I_{2x} , I_{1y} , I_{2y} , ζ , $1/r_1$, $1/r_2$, $1/r_m$;
 I_{1x} - inércia para secção não fendilhada, com armadura disposta na direção x
 I_{2y} - inércia para secção totalmente fendilhada, com armadura disposta na direção x
 I_{1y} - inércia para secção não fendilhada, com armadura disposta na direção y
 I_{2y} - inércia para secção totalmente fendilhada, com armadura disposta na direção y
- 6) Calcular o contributo de cada elemento finito referente a cada direção separadamente, dado por: $1/r_m * M_1 * A$;
- 7) Somar a contribuição de cada elemento finito referente a cada direção;
- 8) E por fim, somar os dois contributos de cada direção, obtendo assim a flecha final.

De acordo com o exposto, foi desenvolvida uma folha de cálculo em Excel para onde serão exportados os momentos fletores médios no centro dos elementos (M) resultantes das cargas para as quais se quer calcular a flecha, bem como os momentos fletores médios devidos á carga unitária aplicada ao nó onde

se quer saber o deslocamento ($M1$), para cada elemento finito e referentes a cada direção. Estes momentos fletores são momentos por metro de largura. A partir disto, e introduzindo os parâmetros necessários acima descritos, é feito o cálculo automático das curvaturas. Consequentemente, é determinada a contribuição para a flecha final referente a cada elemento finito, por integração numérica conforme a expressão (4.18). Esta contribuição é calculada para cada direção, sendo em seguida, para cada elemento finito, somadas essas contribuições. Finalmente, são somadas as contribuições de todos os elementos finitos, obtendo-se assim o deslocamento final no nó em que foi aplicada a força unitária. Os cálculos dos deslocamentos são feitos em três cenários distintos, descritos nos subtítulos 5.4.1, 5.4.2, e 5.4.3. O primeiro cenário passa pelo cálculo do deslocamento elástico, sem considerar as armaduras nem os efeitos da fendilhação e da fluência. Este cálculo destina-se a fazer uma validação deste método, comparando os resultados assim obtidos com os resultados dos deslocamentos dados pelo programa de cálculo. O segundo cenário passa pelo cálculo do deslocamento a curto prazo, entrando com as armaduras adotadas e apenas com os efeitos da fendilhação. E por último, o cálculo do deslocamento a longo prazo, introduzindo o efeito da fluência, sendo este o principal objetivo deste trabalho.

5.4.1 DESLOCAMENTO ELÁSTICO, SEM ARMADURA E SEM EFEITO DA FENDILHAÇÃO

Para este cenário, o cálculo das curvaturas referente a cada elemento finito será efetuado a partir da expressão (4.1), onde os parâmetros são determinados considerando apenas a contribuição do betão. De seguida, será calculada a flecha conforme a expressão (4.18), por integração numérica referente a cada elemento finito, conforme ilustrado no Quadro 5.3 do exemplo que se segue.

5.4.2 DESLOCAMENTOS A CURTO PRAZO, CONSIDERANDO A PRESENÇA DE ARMADURA E CONSIDERANDO O EFEITO DA FENDILHAÇÃO

Neste cenário, a curvatura média referente a cada elemento finito será calculada a partir de expressão (5.1), sendo as curvaturas para o estado I e II calculadas a partir da expressão (4.1), considerando o efeito das armaduras e da fendilhação (para os elementos finitos em que momento atuante seja superior ao momento de fendilhação do betão (M_{cr}), conforme exposto no subcapítulo 5.2 e ilustrado no Quadro 5.7). Todos estes cálculos são efetuados separadamente para a direção X e direção Y. A referida folha de cálculo verifica se o momento atuante é ou não superior ao momento de fendilhação do betão (M_{cr}); quando este for superior, a curvatura média é calculada afetada do coeficiente ζ , a partir da expressão (5.2); caso o momento atuante seja inferior a M_{cr} , este coeficiente é tomado igual a zero, sendo assim a curvatura média igual à curvatura no estado I. É também de notar que ao entrar com as armaduras adotadas, teremos zonas da laje com secções diferentes, a que correspondem inércias fendilhadas diferentes, conforme ilustrado na Figura 5.7; isso faz com que seja necessário agrupar os elementos finitos consoante a armadura adotada na zona em questão, fazendo corresponder a cada um deles os respetivos esforços transportados do programa de cálculo. Finalmente, para cada elemento finito será efetuado o cálculo da curvatura média, utilizando ou a inércia da secção bruta, não fendilhada, ou a inércia fendilhada e homogeneizada real, associada a cada zona em causa e cada direção. No exemplo que se segue foi feito o dimensionamento das armaduras de forma simplificada, utilizando o momento máximo positivo instalado na laje em cada direção e adotando uma armadura inferior uniforme. No que respeita à armadura superior, foi adotada uma armadura mínima de fendilhação, corrida, a dispor ao longo da laje, nas duas direções, conforme exposto pelo (NP EN

1992-1-1 2010). Devido aos momentos negativos que aparecem na zona dos apoios, esta armadura foi reforçada com $4\phi 8$ por metro.

5.4.3 DESLOCAMENTOS A LONGO PRAZO, CONSIDERANDO A PRESENÇA DE ARMADURA E CONSIDERANDO O EFEITO DA FENDILHAÇÃO E FLUÊNCIA

O cálculo será efetuado à semelhança do caso anterior, introduzido o efeito da fluência, alterando o módulo de elasticidade e originando novas inércias. Também o coeficiente β é alterado, passando de 1 para 0.5 conforme exposto no EC2.

5.5 EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DO EC2 A UM PAINEL DE LAJE SIMPLEMENTE APOIADA

Foi considerada uma laje fungiforme maciça simplesmente apoiada, com a dimensão em planta de 6.0×6.0 m², conforme ilustrada na Figura 5.8, com uma espessura constante de 0.26 m. A laje está sujeita a uma carga permanente $g_k=9.5$ kN/m² (incluindo peso próprio) e a uma sobrecarga $q_k=4$ kN/m² ($\psi_2=0.3$).

Materiais: C30/37 ($\phi(\infty,28) = 2.5$ e $\chi = 0.8$ – considera-se), A500

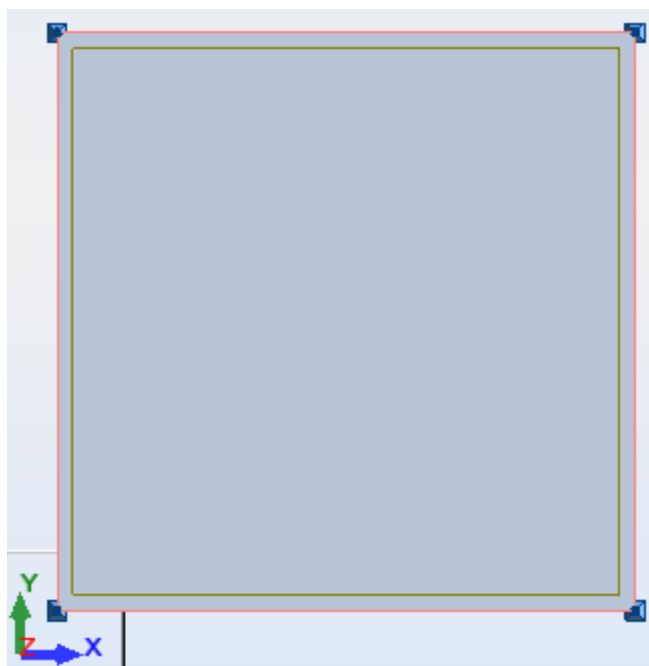


Figura 5.8 - Painél 6x6 m² simplesmente apoiada

Pretende-se calcular a flecha máxima no ponto central da laje para combinações quase-permanentes de ações, usando o método mais rigoroso do EC2.

Neste exemplo serão calculados os deslocamentos apenas referentes ao primeiro e ao terceiro cenário mencionados anteriormente (elástico e a longo prazo).

i. Flecha máxima elástica

- 1) Laje dividida em elementos finitos com dimensão 0.25×0.25 m²:

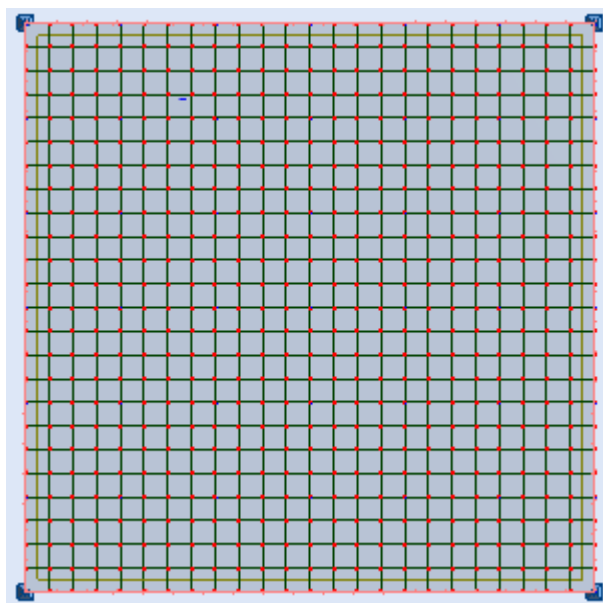


Figura 5.9 - Painél 6x6 m2 devido em elementos finitos 0.25x0.25 m2

- 2) Para este cenário, não será necessário agrupar os elementos finitos por zonas de igual secção de armadura, visto que se considerou a laje constituída por um material homogéneo, de espessura constante;
- 3) M_{cr} e E_c, f_{ct} não aplicável a este cenário, visto que não se considera nem a fendilhação nem a fluência;
$$Ed = Gk + \sum \psi_2 Qk = 9.5 + 0.3 \times 4 = 10.7 \text{ kN/m}^2$$
- 4) Exportação dos momentos referentes a cada elemento finito e a cada direcção: M_x , M_y , M_{1x} , M_{1y} ;

Elemento/Caso	MXX (kNm/m)	MYY (kNm/m)	MXY (kNm/m)	Área (m2)
1/ 20 (C)	-17,01	-17,01	39,75	0,0625
2/ 20 (C)	-13,07	-25,02	32,98	0,0625
3/ 20 (C)	-11,35	-31,24	28,61	0,0625
4/ 20 (C)	-10,20	-36,74	24,58	0,0625
5/ 20 (C)	-9,43	-41,46	20,86	0,0625
6/ 20 (C)	-8,88	-45,44	17,36	0,0625
7/ 20 (C)	-8,48	-48,72	14,02	0,0625
8/ 20 (C)	-8,19	-51,33	10,79	0,0625
9/ 20 (C)	-7,98	-53,26	7,65	0,0625
10/ 20 (C)	-7,85	-54,55	4,57	0,0625
11/ 20 (C)	-7,79	-55,19	1,52	0,0625
12/ 20 (C)	-7,79	-55,19	-1,52	0,0625
13/ 20 (C)	-7,85	-54,55	-4,57	0,0625
14/ 20 (C)	-7,98	-53,26	-7,65	0,0625
15/ 20 (C)	-8,19	-51,33	-10,79	0,0625
16/ 20 (C)	-8,48	-48,72	-14,02	0,0625
17/ 20 (C)	-8,88	-45,44	-17,36	0,0625
18/ 20 (C)	-9,43	-41,46	-20,86	0,0625
19/ 20 (C)	-10,20	-36,74	-24,58	0,0625
20/ 20 (C)	-11,35	-31,24	-28,61	0,0625
21/ 20 (C)	-13,07	-25,02	-32,98	0,0625
22/ 20 (C)	-17,01	-17,01	-39,75	0,0625
23/ 20 (C)	-25,02	-13,07	32,98	0,0625
24/ 20 (C)	-21,48	-21,48	28,84	0,0625
25/ 20 (C)	-19,14	-28,15	25,44	0,0625
26/ 20 (C)	-17,50	-33,84	22,10	0,0625
27/ 20 (C)	-16,30	-38,70	18,88	0,0625

Quadro 5.2 – Resultados dos momentos aplicado ao nível medio de cada elemento finito resultante da ULS, assim como as respectivas áreas obtido pelo Robot

Serão exportados para a folha de Excel tanto os resultados devidos ao carregamento para a qual se quer o deslocamento (ULS), como os resultados para a carga unitária aplicada ao nó onde se quer o deslocamento.

- 5) Cálculo da Inércia (considerando apenas a contribuição do betão):

Secção: 1×0.26 C30/37

$$I_{1x} = I_{1y} = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{1 \times 0.26^3}{12} = 0,001464667 \text{ m}^4$$

- 6) Cálculo das curvaturas:

Usando a expressão (4.1): $\frac{1}{r_c} = \frac{M}{EI_c}$

- 7) Introduzindo esses dados na folha de cálculo em Excel conforme ilustrado no Quadro 5.3, o cálculo será efetuado chegando-se aos seguintes resultados:

Quadro 5.3 - Folha de cálculo em Excel para o deslocamento elástico

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Ecm =	33	Gpa											
2														
3	I1x=I1y =	0,001464667	m^4											
4														
5														
6														
7														
8	XX								YY					
9	Elemento	Área	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A			Elemento	Área	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A
10	1	0,0625	-17,01	-0,5	-0,00035	0,000011			1	0,0625	-17,01	-0,5	-0,00035	0,000011
11	2	0,0625	-13,07	-0,39	-0,00027	0,000007			2	0,0625	-25,02	-0,75	-0,00052	0,000024
12	3	0,0625	-11,35	-0,34	-0,00023	0,000005			3	0,0625	-31,24	-0,97	-0,00065	0,000039
13	20	0,0625	-11,35	-0,34	-0,00023	0,000005			20	0,0625	-31,24	-0,97	-0,00065	0,000039
14	21	0,0625	-13,07	-0,39	-0,00027	0,000007			21	0,0625	-25,02	-0,75	-0,00052	0,000024
15	22	0,0625	-17,01	-0,5	-0,00035	0,000011			22	0,0625	-17,01	-0,5	-0,00035	0,000011
16	23	0,0625	-25,02	-0,75	-0,00052	0,000024			23	0,0625	-13,07	-0,39	-0,00027	0,000007
17	24	0,0625	-21,48	-0,65	-0,00044	0,000018			24	0,0625	-21,48	-0,65	-0,00044	0,000018
18	25	0,0625	-19,14	-0,59	-0,00040	0,000015			25	0,0625	-28,15	-0,88	-0,00058	0,000032
19	42	0,0625	-19,14	-0,59	-0,00040	0,000015			42	0,0625	-28,15	-0,88	-0,00058	0,000032
20	43	0,0625	-21,48	-0,65	-0,00044	0,000018			43	0,0625	-21,48	-0,65	-0,00044	0,000018
21	44	0,0625	-25,02	-0,75	-0,00052	0,000024			44	0,0625	-13,07	-0,39	-0,00027	0,000007

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,36943 \text{ cm} \qquad \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,36943 \text{ cm}$$

Como era de esperar, ambas as contribuições finais referentes aos momentos em cada direção são iguais, pelo facto de a laje ter uma secção constante e ser simétrica. A flecha final resultante para a combinação quase-permanente de ações é dada pela soma desses dois contributos:

$$a = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,36943 + 0,36943 = 0,73886 \text{ cm}$$

O deslocamento obtido pelo programa de cálculo é de 0.719 cm, conforme ilustrado na Figura 5.10.

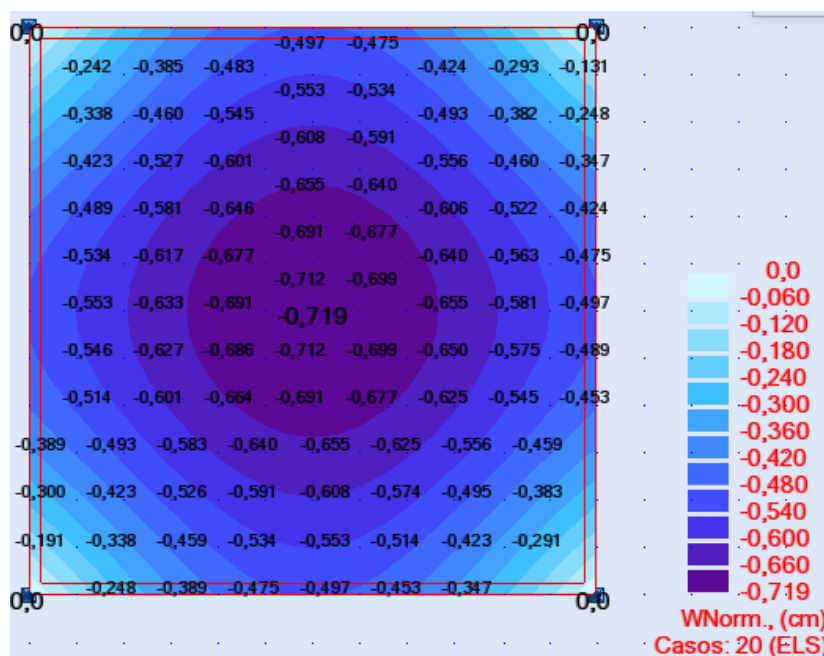


Figura 5.10 - Valores dos deslocamentos no Painél 6*6 m2 para ELS

A diferença encontrada é igual a 0.20 mm, pelo que se crê que este método se pode considerar fiável (a diferença entre os dois valores é da ordem dos 3%).

- ii. Flecha máxima a longo prazo

- 1) Laje dividida em elementos finitos com dimensão $0.25 \times 0.25 \text{ m}^2$, conforme na Figura 5.9.
- 2) Conforme foi referido a laje foi armada numa forma simplificada, sendo que, para a armadura superior a dispor na zona sobre os pilares, foi utilizado o integral do momento sobre uma linha de corte com dimensão de 1 m devido a grande variação de momento sobre os pilares neste tipo de laje (Laje fungiformes), assim como uma armadura mínima superior a dispor ao longo de toda laje para ambas as direções ($\phi 10//0.2$, equivalente a $3.95 \text{ cm}^2/\text{m}$). Assim chegou-se as seguintes armaduras apresentadas no Quadro 5.4 e ilustradas na Figura 5.11 e Figura 5.12.

Quadro 5.4 - Resultado das armaduras a dispor na laje simplesmente apoiada

Direcção	Zona	Sinal	Msd do integral [kN.m/m*(m)]	Lzona [m]	Msd [kN.m/m]	U	W	As			As,efetivo[cm ² /m]
								[cm ² /m]	As-As,min fend	ϕ	
X e Y	Apoio	M-	52,34	1	52,34	0,0495	0,0519	5,49	1,54	$\phi 8//0,25 + \phi 10//0,20$	5,95
	Livre	M+	-	-	33	0,0312	0,0322	3,40	-	$\phi 10//0,16$	4,74

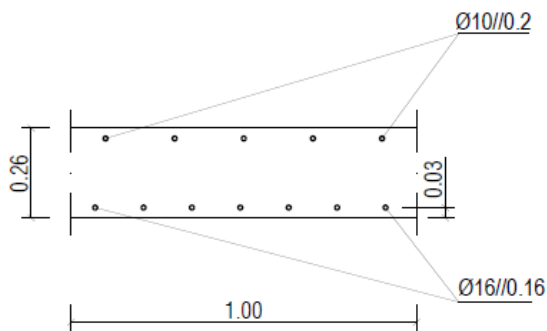


Figura 5.11 - Secção transversal da zona livre para laje simplesmente apoiada

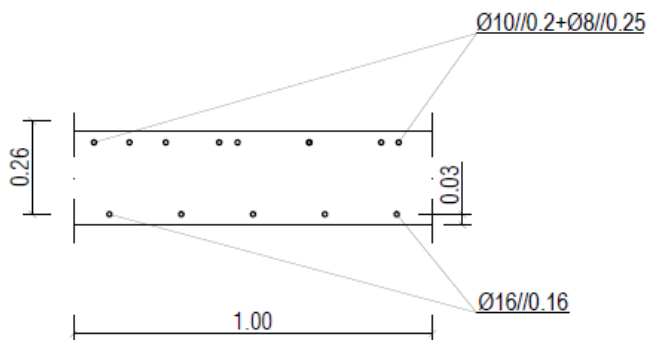


Figura 5.12 - Secção transversal da zona de apoio para laje simplesmente apoiada

Dimensionada a laje, chega-se a duas zonas de secção diferente: uma zona sobre os apoios com a dimensão de $1 \times 1 \text{ m}^2$ e uma zona designada por zona livre, resultante de retirar à área total as referidas áreas sobre os apoios conforme ilustrado na Figura 5.13. Visto que a estrutura é simétrica, as armaduras segundo x e segundo y são iguais. De acordo com isso, seleccionam-se os elementos finitos correspondentes a cada uma das secções, para posterior exportação dos esforços de forma separada para a folha de cálculo.

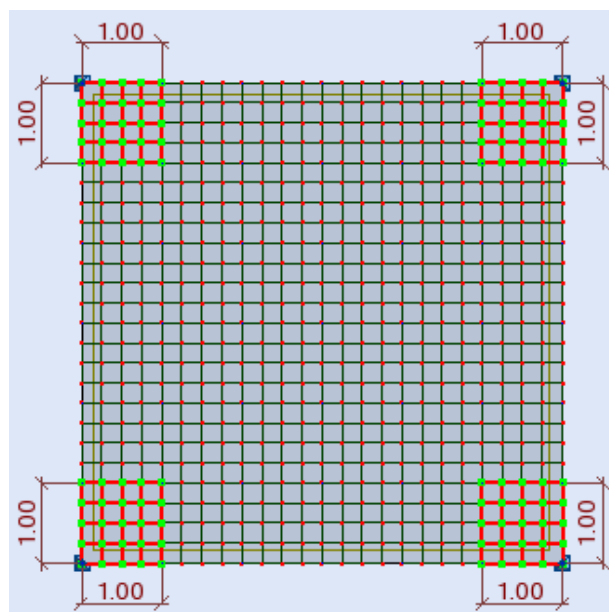


Figura 5.13 - Painél 6x6 m2 com zonas de secções diferentes seleccionadas

3) Cálculo M_{cr} e $E_{c,eff}$:

- Cálculo de M_{cr} :

Secção: 1x0.26 C30/37

$f_{ctm}((NP EN 1992-1-1 2010)) = 2.9 \text{ Mpa} = 2900 \text{ Kpa}$

$$M_{cr} = \frac{f_{ctm} \times b \times h^2}{6} = \frac{2900 \times 1 \times 0.26^2}{6} = 32.67 \text{ kn.m}$$

- Cálculo $E_{c,eff}$:

$E_{cm} = 33 \text{ Gpa}$ $\varphi(\infty, 28) = 2.5$

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi} = \frac{33}{1 + 2.5} = 9.43 \text{ Gpa}$$

4) Exportação dos momentos referente a cada elemento finito e a cada direcção: M_x , M_y , M_{1x} , M_{1y} ;

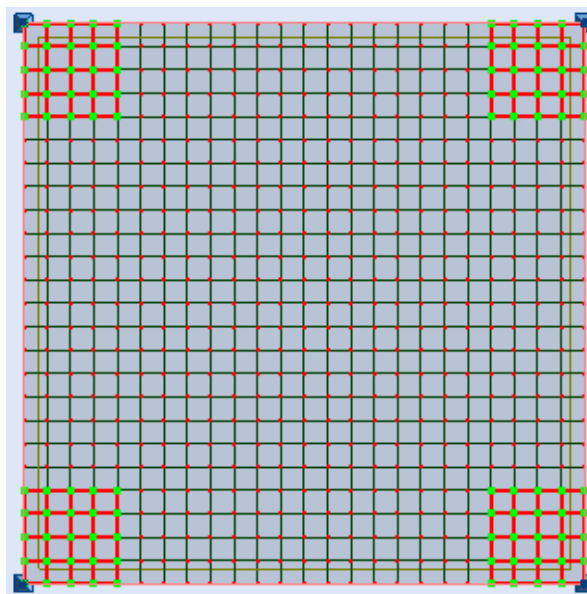


Figura 5.14 - Seleção das zonas sobre os apoios

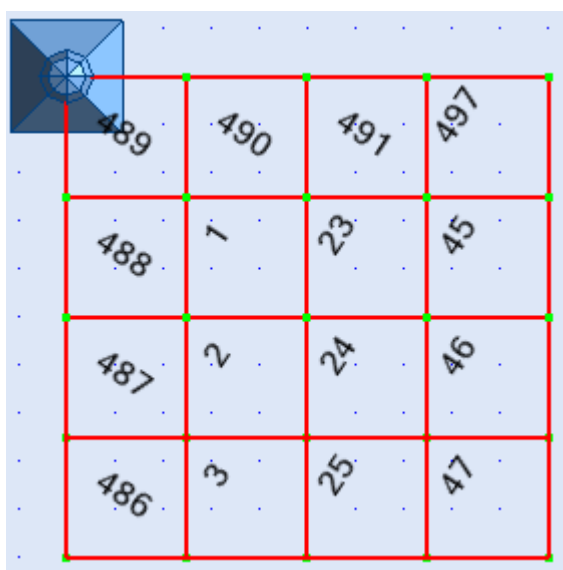


Figura 5.15 - Exemplo de numeração de elementos finitos (excerto)

Quadro 5.5 - Resultados selecionado e posteriormente exportados referentes a zona de apoios

Elemento/Caso	MXx (kNm/m)	MYy (kNm/m)	MXy (kNm/m)	Área (m2)
1/ 20 (C)	-17,01	-17,01	39,75	0,0625
2/ 20 (C)	-13,07	-25,02	32,98	0,0625
3/ 20 (C)	-11,35	-31,24	28,61	0,0625
4/ 20 (C)	-10,20	-36,74	24,58	0,0625
5/ 20 (C)	-9,43	-41,46	20,86	0,0625
6/ 20 (C)	-8,88	-45,44	17,36	0,0625
7/ 20 (C)	-8,48	-48,72	14,02	0,0625
8/ 20 (C)	-8,19	-51,33	10,79	0,0625
9/ 20 (C)	-7,98	-53,26	7,65	0,0625
10/ 20 (C)	-7,85	-54,55	4,57	0,0625
11/ 20 (C)	-7,79	-55,19	1,52	0,0625
12/ 20 (C)	-7,79	-55,19	-1,52	0,0625
13/ 20 (C)	-7,85	-54,55	-4,57	0,0625
14/ 20 (C)	-7,98	-53,26	-7,65	0,0625
15/ 20 (C)	-8,19	-51,33	-10,79	0,0625
16/ 20 (C)	-8,48	-48,72	-14,02	0,0625
17/ 20 (C)	-8,88	-45,44	-17,36	0,0625
18/ 20 (C)	-9,43	-41,46	-20,86	0,0625
19/ 20 (C)	-10,20	-36,74	-24,58	0,0625
20/ 20 (C)	-11,35	-31,24	-28,61	0,0625
21/ 20 (C)	-13,07	-25,02	-32,98	0,0625
22/ 20 (C)	-17,01	-17,01	-39,75	0,0625
23/ 20 (C)	-25,02	-13,07	32,98	0,0625
24/ 20 (C)	-21,48	-21,48	28,84	0,0625
25/ 20 (C)	-19,14	-28,15	25,44	0,0625
26/ 20 (C)	-17,50	-33,84	22,10	0,0625
27/ 20 (C)	-16,30	-38,70	18,88	0,0625
28/ 20 (C)	-15,40	-42,80	15,78	0,0625
29/ 20 (C)	-14,73	-46,16	12,78	0,0625
30/ 20 (C)	-14,24	-48,83	9,85	0,0625

Neste cenário, os resultados serão exportados para a folha de Excel de forma separada, por zonas, conforme podemos ver no quadro abaixo.

Zona Apoio					Zona livre				
Elemento	MXx (Kn.m/m)	MYy (Kn.m/m)	Área (m2)		Elemento	MXx (Kn.m/m)	MYy (Kn.m/m)	Área (m2)	
1	-17,01	-17,01	0,0625		4	-10,20	-36,74	0,0625	
2	-13,07	-25,02	0,0625		5	-9,43	-41,46	0,0625	
3	-11,35	-31,24	0,0625		6	-8,88	-45,44	0,0625	
20	-11,35	-31,24	0,0625		7	-8,48	-48,72	0,0625	
21	-13,07	-25,02	0,0625		8	-8,19	-51,33	0,0625	
22	-17,01	-17,01	0,0625		9	-7,98	-53,26	0,0625	
23	-25,02	-13,07	0,0625		10	-7,85	-54,55	0,0625	
24	-21,48	-21,48	0,0625		11	-7,79	-55,19	0,0625	
25	-19,14	-28,15	0,0625		12	-7,79	-55,19	0,0625	
42	-19,14	-28,15	0,0625		13	-7,85	-54,55	0,0625	
43	-21,48	-21,48	0,0625		14	-7,98	-53,26	0,0625	
44	-25,02	-13,07	0,0625		15	-8,19	-51,33	0,0625	
45	-31,24	-11,35	0,0625		16	-8,48	-48,72	0,0625	
46	-28,15	-19,14	0,0625		17	-8,88	-45,44	0,0625	
47	-25,78	-25,78	0,0625		18	-9,43	-41,46	0,0625	
64	-25,78	-25,78	0,0625		19	-10,20	-36,74	0,0625	
65	-28,15	-19,14	0,0625		26	-17,50	-33,84	0,0625	
66	-31,24	-11,35	0,0625		27	-16,30	-38,70	0,0625	
415	-31,24	-11,35	0,0625		28	-15,40	-42,80	0,0625	
416	-28,15	-19,14	0,0625		29	-14,73	-46,16	0,0625	
417	-25,78	-25,78	0,0625		30	-14,24	-48,83	0,0625	
434	-25,78	-25,78	0,0625		31	-13,89	-50,82	0,0625	
435	-28,15	-19,14	0,0625		32	-13,67	-52,14	0,0625	
436	-31,24	-11,35	0,0625		33	-13,56	-52,79	0,0625	
437	-25,02	-13,07	0,0625		34	-13,56	-52,79	0,0625	

Zona Apoio					Zona livre				
Elemento	MXx (Kn.m/m)	MYy (Kn.m/m)			Elemento	MXx (Kn.m/m)	MYy (Kn.m/m)		
1	-0,5	-0,5			4	-0,3	-1,18		
2	-0,39	-0,75			5	-0,28	-1,37		
3	-0,34	-0,97			6	-0,25	-1,54		
20	-0,34	-0,97			7	-0,24	-1,7		
21	-0,39	-0,75			8	-0,22	-1,83		
22	-0,5	-0,5			9	-0,21	-1,94		
23	-0,75	-0,39			10	-0,2	-2,01		
24	-0,65	-0,65			11	-0,19	-2,05		
25	-0,59	-0,88			12	-0,19	-2,05		
42	-0,59	-0,88			13	-0,2	-2,01		
43	-0,65	-0,65			14	-0,21	-1,94		
44	-0,75	-0,39			15	-0,22	-1,83		
45	-0,97	-0,34			16	-0,24	-1,7		
46	-0,88	-0,59			17	-0,25	-1,54		
47	-0,82	-0,82			18	-0,28	-1,37		
64	-0,82	-0,82			19	-0,3	-1,18		
65	-0,88	-0,59			26	-0,53	-1,1		
66	-0,97	-0,34			27	-0,49	-1,3		
415	-0,97	-0,34			28	-0,46	-1,48		
416	-0,88	-0,59			29	-0,43	-1,65		
417	-0,82	-0,82			30	-0,41	-1,79		
434	-0,82	-0,82			31	-0,38	-1,9		
435	-0,88	-0,59			32	-0,37	-1,98		
436	-0,97	-0,34			33	-0,36	-2,03		
437	-0,75	-0,39			34	-0,36	-2,03		

Quadro 5.6 - Representação dos resultados na folha de Excel

5) Cálculo de I1x, I1y, I2x e I2y:

Para o cálculo das inércias homogeneizadas referentes aos estados I e II foi utilizada a mesma folha de cálculo em Excel referida no subcapítulo 5.3.

Definidas as secções transversais para cada zona e referentes a cada direcção, conforme ilustrado na Figura 5.11 e Figura 5.12, serão calculados três inércias para cada uma das secções. Em cada secção teremos $I_{1x}=I_{1y}$ e $I_{2x}=I_{2y}$; para $I_{2x}=I_{2y}$ serão calculados dois valores, um admitindo fendilhação com a armadura de tração igual à armadura inferior e outro admitindo que armadura em tração é a armadura superior. Assim, dada essa situação, serão calculadas duas inércias para o estado II, estando a folha de cálculo programada para considerar de forma automática a inércia $I_{2(+)}$ ou $I_{2(-)}$, consoante o sinal do momento atuante no elemento finito.

$I_{2(+)}$ – Inércia considerada fendilhada para momentos positivos

$I_{2(-)}$ – Inércia considerada fendilhada para momentos negativos

Considerando módulo de elasticidade do aço:

A500

$$E_s=200\text{Gpa} \Rightarrow \alpha = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{200}{9.43} = 21.2$$

E a quantidade e o posicionamento das armaduras conforme ilustrada na Figura 5.11 e Figura 5.12.

Recobrimentos: $a=3\text{cm}$

Altura útil: $d=0.23\text{m}$

Vem então:

- Zona livre
 - $I_{1x} = I_{1y} = 0.001815 \text{ m}^4$
 - $I_{2x} = I_{2y}(+) = 0.00085538 \text{ m}^4$
 - $I_{2x} = I_{2y}(-) = 0.00032322 \text{ m}^4$
- Zona de apoio
 - $I_{1x} = I_{1y} = 0.001860 \text{ m}^4$
 - $I_{2x} = I_{2y}(+) = 0.000868187 \text{ m}^4$
 - $I_{2x} = I_{2y}(-) = 0.000459523 \text{ m}^4$

6) Cálculo das curvaturas:

Neste cenário, a curvatura média de cada elemento, para cada direcção, é calculada a partir da expressão (5.1), considerando os efeitos da fendilhação e da fluência:

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{r_1}(1 - \zeta) + \frac{1}{r_2}\zeta$$

As curvaturas referentes aos estados I e II e o coeficiente distribuição são calculadas a partir da expressão (4.1) e (5.2), sendo:

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2, \text{ com } \beta = 0.5$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{M}{(E_{c,eff} \times I_1)}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{M}{(E_c, eff \times I_2)}$$

- 7) Tendo os dados necessários prossegue-se com o cálculo da contribuição de cada elemento finito, cálculo esse que representa o cálculo do volume dado pelo produto do valor da curvatura média pelo valor do momento resultante da força unitária atuante no ponto onde se deseja o deslocamento. Esse valor é ainda multiplicado pela área do elemento finito a que diz respeito. Finalmente, somam-se essas contribuições referentes a cada direção conforme ilustrado no Quadro 5.7:

Quadro 5.7 - Folha de cálculo em Excel para o deslocamento á longo prazo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	32,67	kNm		Ec,eff =	9,43	Gpa													
2	Zona Apoio			Zona Livre																
3	I1x=I1y =	0,001860116	m^4	I1x=I1y =	0,00181457	m^4														
4																				
5	I2x=I2y(+) =	0,000868187	m^4	I2x=I2y(+) =	0,00085538	m^4														
6																				
7	I2x=I2y(-) =	0,000459523	m^4	I2x=I2y(-) =	0,00032322	m^4														
8																				
9	XX								YY											
10	Elemento	A	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmM 1xA	Elemento	A	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmM 1xA		
11	1	0,0625	-17,01	-0,5	0	-0,00097	-0,00208	-0,00097	0,000030	1	0,0625	-17,01	-0,5	0	-0,00097	-0,00208	-0,00097	0,000030		
12	2	0,0625	-13,07	-0,39	0	-0,00075	-0,00160	-0,00075	0,000018	2	0,0625	-25,02	-0,75	0	-0,00143	-0,00306	-0,00143	0,000067		
13	3	0,0625	-11,35	-0,34	0	-0,00065	-0,00139	-0,00065	0,000014	3	0,0625	-31,24	-0,97	0	-0,00178	-0,00382	-0,00178	0,000108		
73	573	0,0625	-4,04	-0,12	0	-0,00023	-0,00049	-0,00023	0,000002	573	0,0625	-27,29	-0,82	0	-0,00156	-0,00333	-0,00156	0,000080		
74	574	0,0625	-3,5	-0,1	0	-0,00020	-0,00043	-0,00020	0,000001	574	0,0625	-33,39	-1,03	0,52133	-0,00190	-0,00408	-0,00304	0,000196		
75																				
76	4	0,0625	-10,2	-0,3	0	-0,00060	-0,00126	-0,00060	0,000011	4	0,0625	-36,74	-1,18	0,60464	-0,00215	-0,00455	-0,00360	0,000266		
77	5	0,0625	-9,43	-0,28	0	-0,00055	-0,00117	-0,00055	0,000010	5	0,0625	-41,46	-1,37	0,68954	-0,00242	-0,00514	-0,00430	0,000368		
78	6	0,0625	-8,88	-0,25	0	-0,00052	-0,00110	-0,00052	0,000008	6	0,0625	-45,44	-1,54	0,74154	-0,00266	-0,00563	-0,00486	0,000468		
79	7	0,0625	-8,48	-0,24	0	-0,00050	-0,00105	-0,00050	0,000007	7	0,0625	-48,72	-1,7	0,77517	-0,00285	-0,00604	-0,00532	0,000565		
80	8	0,0625	-8,19	-0,22	0	-0,00048	-0,00102	-0,00048	0,000007	8	0,0625	-51,33	-1,83	0,79745	-0,00300	-0,00636	-0,00568	0,000650		

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 1,780923 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 1,780923 \text{ cm}$$

Também como era de esperar, ambas as contribuições finais referentes aos momentos de cada direção são iguais, pelo facto laje ser simétrica e estar igualmente armada para as duas direções.

- 8) Por fim, chega-se fecha final somando a contribuição final referente a cada direção:

$$a = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 1,780923 + 1,780923 = 3,561846 \text{ cm}$$

No capítulo seguinte serão discutidos com mais detalhe os resultados obtidos para este cenário.

A totalidade dos quadros obtidos, só pode ser apresentada no CD que acompanha este trabalho, dada a grande dimensão que ocuparia ao ser apresentada em Anexos.

5.6 CÁLCULO DA FLECHA MÁXIMA A LONGO PRAZO UTILIZANDO O MÉTODO BILINEAR ADAPTADO

Tratando-se da aplicação do método bilinear a um elemento bidirecional, usou-se uma metodologia para chegar à flecha do centro do painel com base no exposto em (Favre et al. 1985) pag 3.24; esta metodologia que consiste em dividir o painel em bandas conforme se ilustra na Figura 5.16, duas sobre

os apoios e outra perpendicular a estas, passando pelo ponto central do painel onde se pretende a flecha, sendo que neste caso esta é obtida a partir da expressão (5.3). As flechas centrais referentes a cada banda são calculadas aplicando o método bilinear a essas bandas.

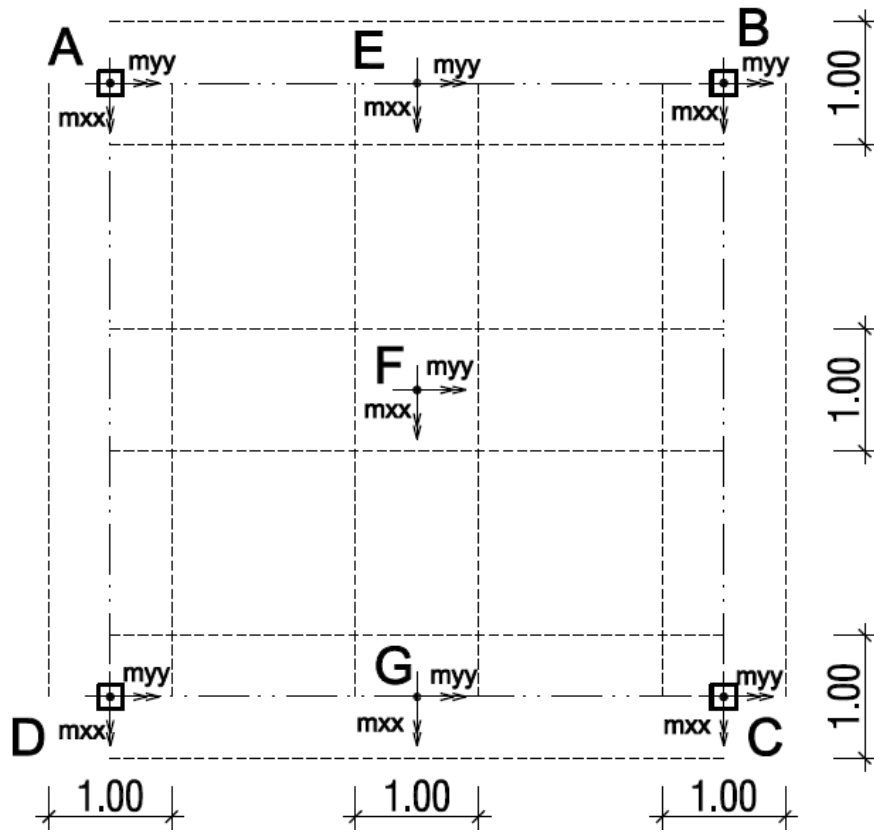


Figura 5.16 - Esquemática das bandas utilizadas para o Painél

$$a_{t_F} = \frac{a_{t_E} + a_{t_G}}{2} + (a_{t_F})_{Relativo} \quad (5.3)$$

Consoante a direção da banda, será necessário considerar os momentos atuantes nessa direção, assim como as armaduras dessa mesma direção. Por exemplo, na banda A-E-B, para o cálculo do deslocamento no ponto E aplicando o método bilinear, utiliza-se o momento mxx (momento por unidade comprimento e largura atuante na direção x) e as armaduras na mesma direção dimensionadas para resistir aos momentos mxx para a combinação do estado limite ultimo.

No presente caso, visto ser um painel simplesmente apoiado, será considerado um modelo simplesmente apoiado conforme ilustra a Figura 5.17, para calcular os coeficientes para aplicação do método.

5.6.1 BANDA A-E-B

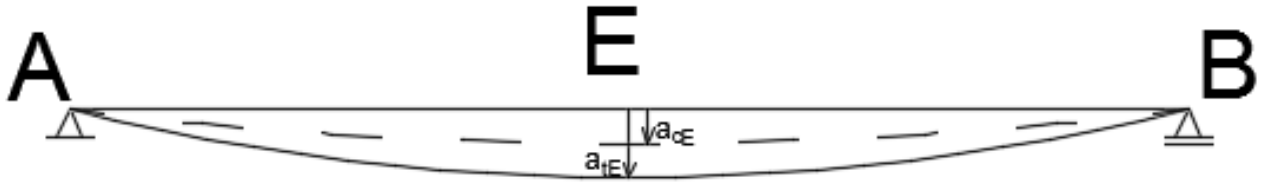


Figura 5.17 - Banda A-E-B com a respetiva condição de fronteira e deslocamentos

- Flecha elástica do Ponto E:

$$a_{cE} = 0.485 \text{ cm}$$

- Coeficientes k para a secção determinante E:

Parâmetros:

$$\frac{d}{h} = \frac{0.23}{0.26} \cong 0.9$$

$$\frac{d'}{h} = \frac{0.03}{0.26} \cong 0.115$$

$$\alpha \cdot \rho = \frac{E_s}{E_{cm}} \cdot \frac{A_s}{b \cdot d} = \frac{200}{33} \cdot \frac{14.07 \cdot 10^{-4}}{1 \times 0.26} = 0.033$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{A_s'}{A_s} = \frac{3.95 \cdot 10^{-4}}{14.07 \cdot 10^{-4}} \cong 0.28$$

$$\chi \cdot \varphi = 0.8 \times 2.5 = 2$$

A partir desses parâmetros, os coeficientes são obtidos através dos ábacos expostos no anexo A1:

$$k_{s1} \cong 0.93 ; k_{s2} = 4.8 ; k_{\varphi 1} = 0.83 ; k_{\varphi 2} = 0.12$$

- Flechas em estado I e II:

Dadas pelas expressões (4.23) e (4.24) desprezando as parcelas da retração:

$$t = \infty \Rightarrow \begin{cases} a_{IE} = k_{s1}(1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi) \cdot ac = 0.93 \cdot (1 + 0.83 \cdot 2.5) \cdot 0.485 \\ a_{IIE} = k_{s2}(1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi) \cdot ac = 4.8 \cdot (1 + 0.12 \cdot 2.5) \cdot 0.485 \end{cases}$$

$$t = \infty \Rightarrow \begin{cases} a_{IE} = 1.387 \text{ cm} \\ a_{IIE} = 3.026 \text{ cm} \end{cases}$$

- Momento fletor atuante na secção determinante (Ponto E):
 $M_{xx} = 58.83 \text{ kn.m/m}$
- Momento de fendilhação:

Já calculado anteriormente: $M_{cr} = 32.67 \text{ kn.m/m}$

- Coeficiente distribuição ζ , calculado a partir da expressão (4.21) para a secção determinante:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_{rD}}{M_D} \right)$$

$$\zeta = 1 - 1 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{32,67}{63,76} \right) = 0,744$$

- Flecha a longo prazo do ponto E, estimada a partir da expressão (4.22):

$$a_{tE} = (1 - \zeta) \cdot a_{IE} + \zeta \cdot a_{IIE} = (1 - 0,744) \cdot 1,387 + 0,744 \cdot 3,026 = 2,571 \text{ cm}$$

Visto o painel ser simétrico nas duas direções o deslocamento a longo prazo do ponto G será igual ao do Ponto E, já calculado.

5.6.2 BANDA E-F-G

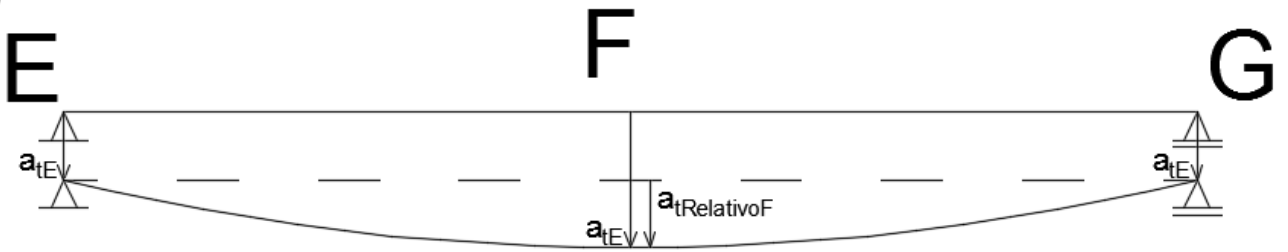


Figura 5.18 - Banda E-F-G com a respetiva condição de fronteira e deslocamentos

- Flecha elástica do Ponto F:

$$a_{cF} = 0,719 \text{ cm}$$

$$(a_{cF})_{Relativo} = a_{cF} - a_{cE} = 0,719 - 0,485 = 0,234 \text{ cm}$$

- Coeficientes k para a secção determinante F:
Sendo a secção F exatamente igual à secção E os coeficientes utilizados são os mesmos:

$$k_{s1} \cong 0.93 ; k_{s2} = 4.8 ; k_{\varphi 1} = 0.83 ; k_{\varphi 2} = 0.12$$

- Flechas em estado I e II:

$$t = \infty \Rightarrow \begin{cases} a_{IF} = k_{s1}(1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi) \cdot ac = 0,93 \cdot (1 + 0,83 \cdot 2,5) \cdot 0,234 \\ a_{IIF} = k_{s2}(1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi) \cdot ac = 4,8 \cdot (1 + 0,12 \cdot 2,5) \cdot 0,234 \end{cases}$$

$$t = \infty \Rightarrow \begin{cases} a_{IE} = 0,669 \text{ cm} \\ a_{IIE} = 1,460 \text{ cm} \end{cases}$$

- Momento fletor atuante na secção determinante (Ponto F):
 $M_{yy} = 41,54 \text{ kn.m}$
- Momento de fendilhação:
 Já calculado anteriormente: $M_{cr} = 32.67 \text{ kn.m}$
- Coeficiente distribuição ζ , calculada a partir da expressão (4.21) para a secção determinante F:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_{rD}}{M_D} \right)$$

$$\zeta = 1 - 1 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{32,67}{41,54} \right) = 0,607$$

- Flecha relativa a longo prazo do ponto F estimada a partir da expressão (4.22):

$$(a_{cF})_{\text{Relativo}} = (1 - \zeta) \cdot a_{IF} + \zeta \cdot a_{IIF} = (1 - 0,607) \cdot 0,669 + 0,607 \cdot 1,460$$

$$= 1,149 \text{ cm}$$

5.6.3 DEFORMAÇÃO FINAL

Recorrendo à expressão (5.3):

$$a_{tF} = \frac{a_{tE} + a_{tG}}{2} + (a_{tF})_{\text{Relativo}} = \frac{2 \cdot 2,571}{2} + 1,149 = 3,72 \text{ cm}$$

Portanto, com o método implementado obteve-se a flecha máxima a longo prazo igual a 3.56 cm, enquanto que, com o método simplificado (método bilinear) se obteve, para a mesma carga, um valor de 3.72 cm. Observa-se assim uma diferença de 1.6 mm, equivalente a um desvio de 4.3%, que se considera satisfatório.

6

EXEMPLOS, DISCUSSÃO E VALIDAÇÃO

Neste presente capítulo será apresentado o cálculo de deformação de dois exemplos de laje fungiforme, através do método mais rigoroso de EC2 descrito no capítulo anterior, por forma a fazer a validação do mesmo e calcular os deslocamentos previstos a curto prazo (considerando a laje armada e entrando com os efeitos da fendilhação), e a longo prazo (acrescentando o efeito da fluência), sendo este o grande objetivo deste trabalho. Para ambos os exemplos foram bloqueados os deslocamentos na cabeça dos pilares de modo a obter o deslocamento relativo entre os pontos sobre a laje e os pilares. Irá também ser apresentado um exemplo de uma viga simplesmente apoiada, visto que para peças lineares este método se encontra validado, de maneira a obter uma referência entre valores de deslocamento a longo prazo e deslocamentos elásticos, em peças de betão armado.

6.1 LAJE FUNGIFORME SIMÉTRICA

Apresenta-se então uma laje fungiforme maciça com uma dimensão 15×15 m², com espessura constante de 0.22 m, apoiada em pilares de secção 0.40×0.40 m² disposto numa malha regular com afastamento de 5m nas duas direções conforme se pode ver na Figura 6.1.

Para o cálculo dos esforços da estrutura e determinação das deformações elásticas recorreu-se ao programa de cálculo Robot Structural Analysis Professional 2015.

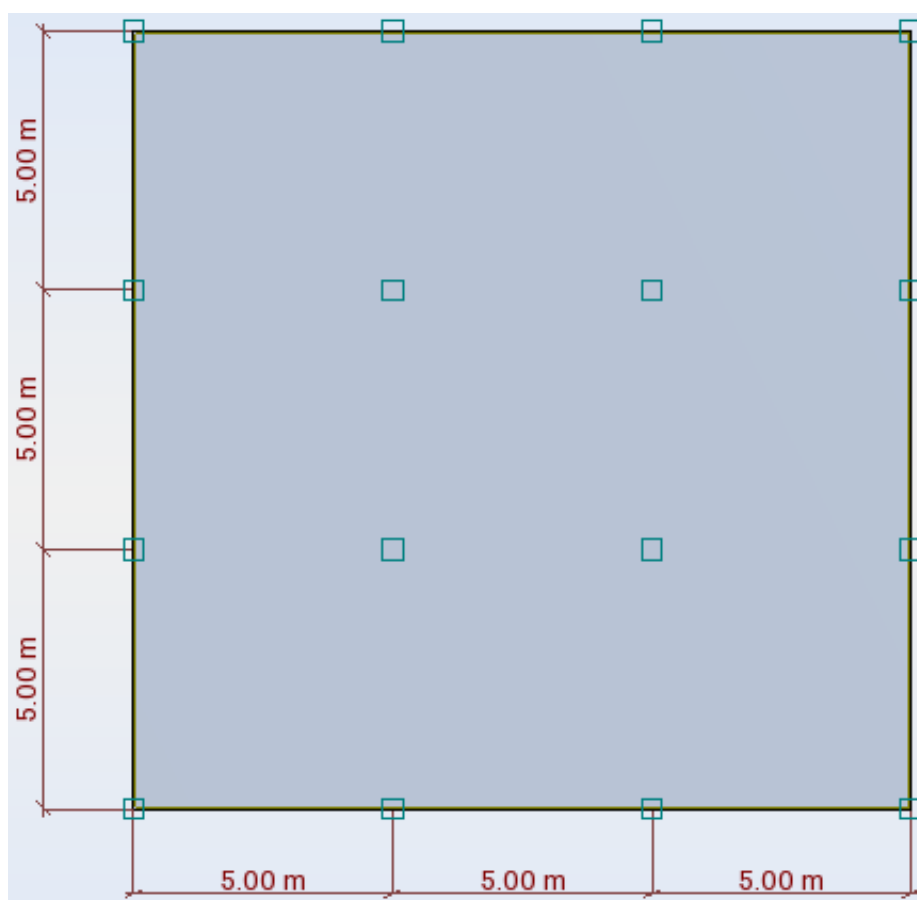


Figura 6.1 - Laje fungiforme simétrica 15×15 m²

Foram considerados as seguintes ações abaixo indicadas.

Quadro 6.1- Ações verticais consideradas

Acções	Descrição	Valor(kN/m ²)	Coeficiente Y
Permanentes	Peso próprio	5,28	1,35
	Restantes Cargas permanente	3,5	
Variáveis	Sobrecarga	3	1,5

Utilizou-se $\Psi_2=0.3$.

Materiais: C30/37 ($\varphi(\infty,28) = 2.5$ e $\chi = 0.8$ – considera-se), A500

Cálculo de deformações

Ir-se-ão calcular as flechas referentes a 3 pontos (A, B e C) da laje conforme ilustrado na Figura 6.2, para a combinação quase-permanente de ações, usando o método desenvolvido conforme descrito no capítulo anterior, num ambiente bidirecional.

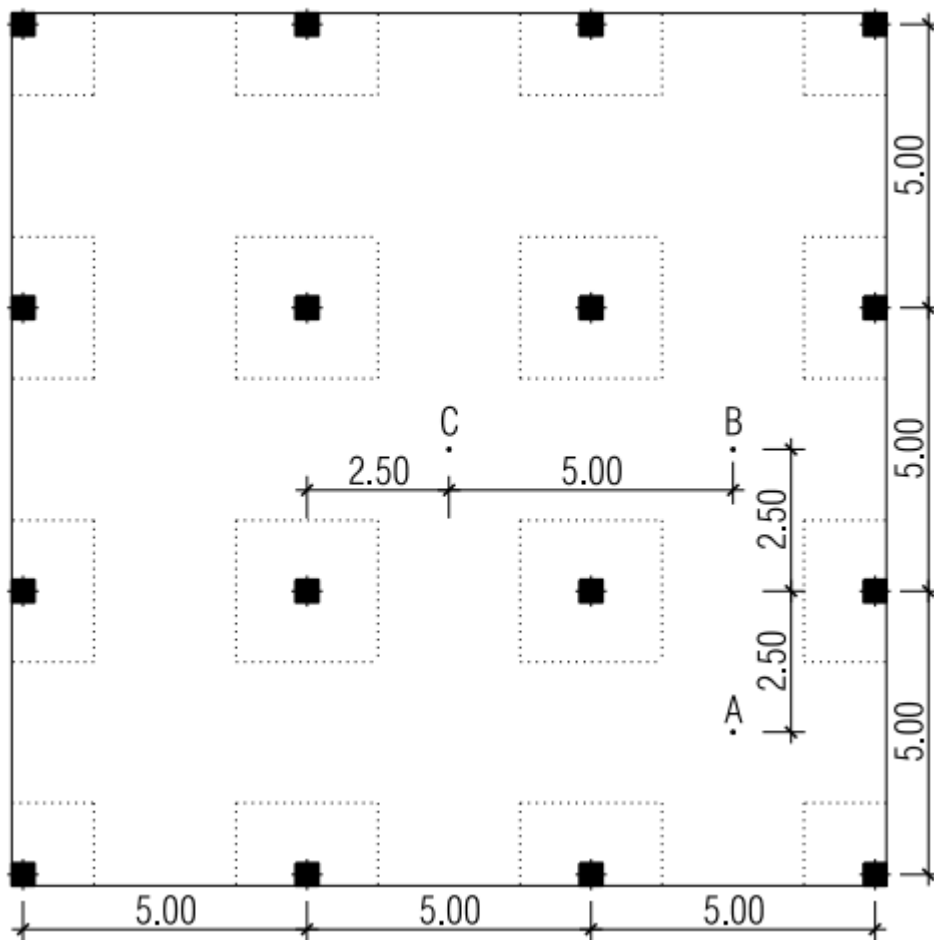


Figura 6.2 - Representação dos pontos a calcular os deslocamentos na laje simétrica

Primeiramente será calculada a flecha elástica referente aos pontos A, B e C, e posteriormente as flechas a curto e longo prazo referentes aos mesmos pontos.

I. Cálculo das flechas elásticas

- 1) Dividiu-se a laje em elementos finitos com dimensão $0,25 \times 0,25$ m², conforme se apresenta na figura abaixo:

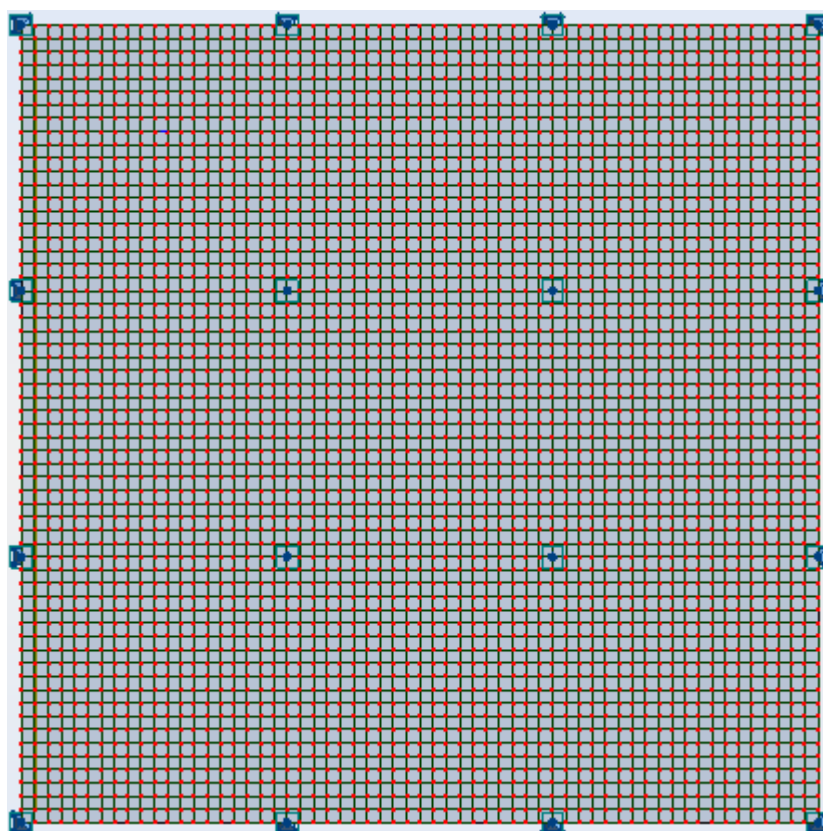


Figura 6.3- Laje fungiforme 15x15 m2 dividido em elementos finitos 0.25x0.25 m2

- 2) Visto que para o cálculo da flecha elástica não se considera a contribuição da armadura, haverá então apenas uma secção constante ao longo da laje, não sendo necessário agrupar os elementos finitos por zonas.

- 3) M_{cr} e $E_{c,eff}$ não aplicável a este caso, visto que não se considera a fendilhação nem a fluência.

É utilizado o módulo de elasticidade médio do betão:

C30/37 $\Rightarrow E_{cm} = 33 \text{ GPa}$ (NP EN 1992-1-1 2010)

O valor de cálculo da ação a considerar para a combinação quase-permanente será:

$$E_d = G_k + \sum \psi_2 Q_k = (25 \times 0.22 + 3.5) + 0.3 \times 3 = 9.9 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

- 4) Inércia (Considerando apenas a contribuição do betão - I_c):

Secção: $1 \times 0.22 \text{ m}^2$ C30/37

$$I_{1x} = I_{1y} = I_c = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{1 \times 0.22^3}{12} = 0,000887333 \text{ m}^4$$

- 5) Cálculo das curvaturas a partir da expressão (4.1) referente a cada direção:

$$\left(\frac{1}{r_1}\right)_x = \frac{M}{E_{cm} \times I_{1x}} \quad ; \quad \left(\frac{1}{r_1}\right)_y = \frac{M}{E_{cm} \times I_{1y}}$$

- 6) Com o auxílio da folha de cálculo desenvolvida em Excel, efetua-se o cálculo das curvaturas dos pontos A, B e C conforme ilustrado nos quadros a seguir, chegando-se aos seguintes resultados:

- Ponto A:

Quadro 6.2 - Cálculo da flecha elástica do ponto A (Laje simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Ecm =	33	Gpa											
2														
3	Ic =	0,000887333	m^4											
4														
5														
6														
7														
8	XX						YY							
9	Elemento	A(m2)	M[kNm/m]	M1[kNm/m]	1/r	1/r*M1*A	Elemento	A(m2)	M[kNm/m]	M1[kNm/m]	1/r	1/r*M1*A		
10	17	0,0625	4,47	0,13	0,00015	0,000001	17	0,0625	4,47	-0,01	0,00015	0,000000		
11	18	0,0625	-0,94	0,05	-0,00003	0,000000	18	0,0625	-3,41	-0,04	-0,00012	0,000000		
12	19	0,0625	-2,02	0,02	-0,00007	0,000000	19	0,0625	-8,43	-0,05	-0,00029	0,000001		
13	20	0,0625	-2,8	0	-0,00010	0,000000	20	0,0625	-12,24	-0,05	-0,00042	0,000001		
14	31	0,0625	-2,8	0	-0,00010	0,000000	31	0,0625	-3,55	0	-0,00012	0,000000		
15	32	0,0625	-2,05	0,01	-0,00007	0,000000	32	0,0625	2,3	0,03	0,00008	0,000000		
16	33	0,0625	-0,79	0,03	-0,00003	0,000000	33	0,0625	9,56	0,06	0,00033	0,000001		
17	34	0,0625	3,13	0,1	0,00011	0,000001	34	0,0625	21,55	0,13	0,00074	0,000006		
18	35	0,0625	6,76	0,15	0,00023	0,000002	35	0,0625	30,38	0,12	0,00104	0,000008		
19	36	0,0625	6,81	0,16	0,00023	0,000002	36	0,0625	30,61	0,12	0,00105	0,000008		
20	37	0,0625	2,97	0,09	0,00010	0,000001	37	0,0625	19,58	0,04	0,00067	0,000002		

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,103670 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,103670 \text{ cm}$$

A flecha final do ponto A, resultante da combinação quase-permanente de ações, é dada pela soma desses dois contributos, na direção X e na direção Y:

$$\delta A = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,103670 + 0,103670 = 0,207340 \text{ cm}$$

- Ponto B:

Quadro 6.3 - Cálculo da flecha elástica do ponto B (Laje simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Ecm =	33	Gpa											
2														
3	Ic =	0,000887333	m^4											
4														
5														
6														
7														
8	XX						YY							
9	Elemento	A(m2)	M[kNm/m]	M1[kNm/m]	1/r	1/r*M1*A	Elemento	A(m2)	M[kNm/m]	M1[kNm/m]	1/r	1/r*M1*A		
10	17	0,0625	4,47	0,09	0,00015	0,000001	17	0,0625	4,47	0,02	0,00015	0,000000		
11	18	0,0625	-0,94	0,03	-0,00003	0,000000	18	0,0625	-3,41	0	-0,00012	0,000000		
12	19	0,0625	-2,02	0,01	-0,00007	0,000000	19	0,0625	-8,43	-0,01	-0,00029	0,000000		
13	20	0,0625	-2,8	0	-0,00010	0,000000	20	0,0625	-12,24	-0,01	-0,00042	0,000000		
14	31	0,0625	-2,8	0	-0,00010	0,000000	31	0,0625	-3,55	0	-0,00012	0,000000		
15	32	0,0625	-2,05	0,02	-0,00007	0,000000	32	0,0625	2,3	0,01	0,00008	0,000000		
16	33	0,0625	-0,79	0,04	-0,00003	0,000000	33	0,0625	9,56	0,03	0,00033	0,000001		
17	34	0,0625	3,13	0,1	0,00011	0,000001	34	0,0625	21,55	0,08	0,00074	0,000004		
18	35	0,0625	6,76	0,16	0,00023	0,000002	35	0,0625	30,38	0,12	0,00104	0,000008		
19	36	0,0625	6,81	0,16	0,00023	0,000002	36	0,0625	30,61	0,12	0,00105	0,000008		
20	37	0,0625	2,97	0,1	0,00010	0,000001	37	0,0625	19,58	0,09	0,00067	0,000004		

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,108337 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,045572 \text{ cm}$$

$$\delta B = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,108337 + 0,045572 = 0,153909 \text{ cm}$$

- Ponto C:

Quadro 6.4 - Cálculo da flecha elástica do ponto C (Laje simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Ecm =		33	Gpa										
2														
3	Ic =		0,000887333	m^4										
4														
5														
6														
7														
8	XX								YY					
9	Elemento	A(m2)	M[kNm/m]	M1[kNm/m]	1/r	1/r*M1*A			Elemento	A(m2)	M[kNm/m]	M1[kNm/m]	1/r	1/r*M1*A
10	17	0,0625	4,47	-0,13	0,00015	-0,000001			17	0,0625	4,47	-0,13	0,00015	-0,000001
11	18	0,0625	-0,94	-0,02	-0,00003	0,000000			18	0,0625	-3,41	0,01	-0,00012	0,000000
12	19	0,0625	-2,02	0,01	-0,00007	0,000000			19	0,0625	-8,43	0,1	-0,00029	-0,000002
13	20	0,0625	-2,8	0,03	-0,00010	0,000000			20	0,0625	-12,24	0,18	-0,00042	-0,000005
14	31	0,0625	-2,8	-0,01	-0,00010	0,000000			31	0,0625	-3,55	0,22	-0,00012	-0,000002
15	32	0,0625	-2,05	-0,05	-0,00007	0,000000			32	0,0625	2,3	0,08	0,00008	0,000000
16	33	0,0625	-0,79	-0,1	-0,00003	0,000000			33	0,0625	9,56	-0,11	0,00033	-0,000002
17	34	0,0625	3,13	-0,28	0,00011	-0,000002			34	0,0625	21,55	-0,45	0,00074	-0,000021
18	35	0,0625	6,76	-0,46	0,00023	-0,000007			35	0,0625	30,38	-0,65	0,00104	-0,000042
19	36	0,0625	6,81	-0,45	0,00023	-0,000007			36	0,0625	30,61	-0,68	0,00105	-0,000044
20	37	0,0625	2,97	-0,24	0,00010	-0,000002			37	0,0625	19,58	-0,41	0,00067	-0,000017

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,047832 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,047832 \text{ cm}$$

$$\delta C = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,047832 + 0,047832 = 0,095665 \text{ cm}$$

Sendo os deslocamentos obtidos pelo programa de cálculo referentes aos pontos A, B e C respetivamente iguais a 0.226 cm, 0.165 cm, 0.087 cm, conforme ilustra a Figura 6.4. As diferenças encontradas entre os valores apresentados acima e os constantes da Figura 6.4 resultam do facto de na figura serem apresentados os máximos locais e não os valores respeitantes aos nós A, B e C. (Os máximos ocorrem em pontos não exatamente coincidentes com A, B e C)

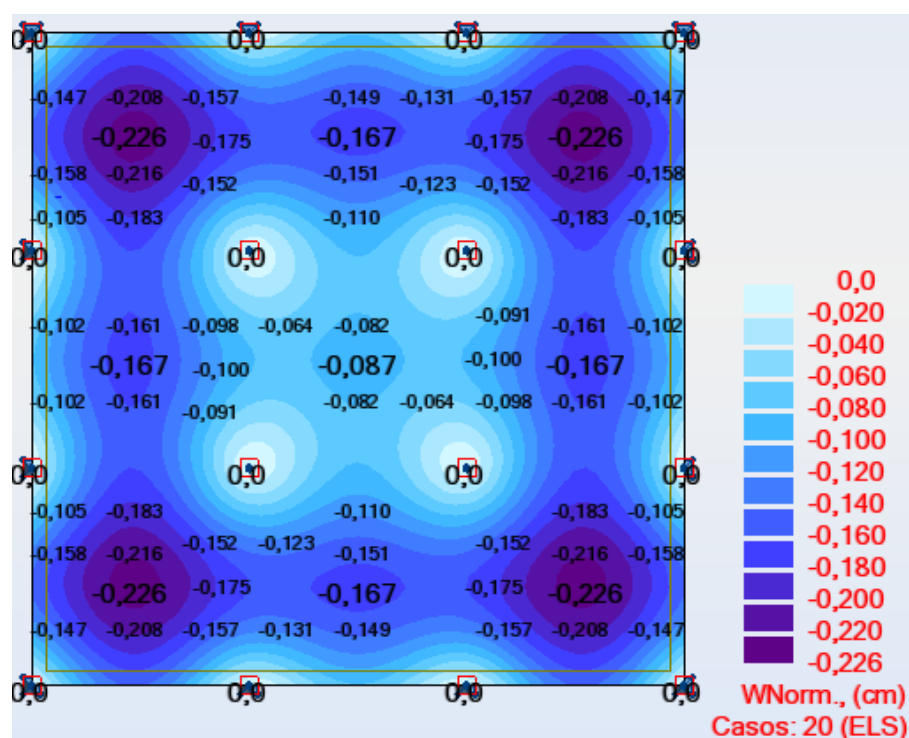


Figura 6.4 - Mapa dos deslocamentos sobre a Laje simétrica para ELS

II. Cálculo das flechas a curto prazo

- 1) A laje mantém-se dividida, conforme ilustrado na Figura 6.3 em elementos finitos de $0,25 \times 0,25$ m²;
- 2) Visto não ser o objetivo principal deste trabalho, efetuou-se o dimensionamento das armaduras de uma forma simplificada. Calculou-se a partir do momento máximo positivo resultante do programa de cálculo a armadura inferior a dispor ao longo da laje para as duas direções. A armadura superior sobre os pilares foi calculada a partir do momento máximo negativo resultante da divisão do integral dos momentos atuantes segundo uma linha de corte definida sobre o pilar pelo comprimento dessa linha, conforme ilustra a Figura 6.5 para momentos atuantes na direção X. A sua dimensão foi estabelecida com base no método dos Pórticos Equivalentes, descrito no subcapítulo 3.3 e ilustrado na figura 0.5. Esta armadura é disposta ao longo dessa mesma linha e com um comprimento de $1/4$ do pilar, sendo l o vão na direção do momento utilizado. Neste caso, sendo a estrutura simétrica e tendo cada painel 5m de vão, essa linha terá um comprimento igual a 1.25m. Também foi disposta ao longo de toda a laje, nas duas direções, uma armadura mínima superior igual a $\phi 10/0,20$ para controlo de fendilhação referida na secção 7.3.2 do (NP EN 1992-1-1 2010).

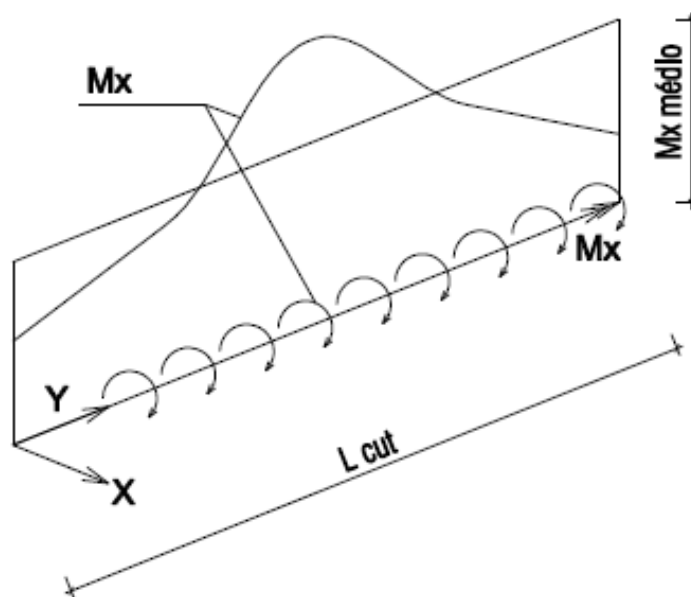


Figura 6.5 - Esquematização do momento negativo medio na direção x

Apresentam-se no Quadro 6.5 os momentos utilizados para o cálculo, assim como as armaduras resultantes em cada direção (neste caso serão iguais, dada a simetria da estrutura e do carregamento).

Quadro 6.5 - Armaduras para cada direção na laje simétrica

Direção	Zona	Sinal	Msd do integral [kN.m/m*(m)]	Lzona [m]	Msd [kN.m/m]	U	W	As			As,efetivo [cm²/m]
								[cm²/m]	As-As,min fend	φ	
X	Apoio	M-	175,25	2,5	70,10	0,0971	0,1065	9,31	5,36	φ12//0,2+φ10//0,20	9,6
	Livre	M+	-	-	33	0,0457	0,0478	4,18	-	φ10//0,16	4,74
Y	Apoio	M-	175,25	2,5	70,10	0,0971	0,1065	9,31	5,36	φ12//0,2+φ10//0,20	9,6
	Livre	M+	-	-	33	0,0457	0,0478	4,18	-	φ10//0,16	4,74

Com isso, chegou-se a duas zonas de secções diferentes denominadas de zona de apoio (área sobre os apoios, onde serão colocadas as armaduras de reforço na face superior para os momentos negativos) e zona livre (área restante da laje, retirada a área da zona de apoio); a partir disto, é feita a seleção dos elementos finitos pertencentes às referidas zonas, conforme ilustrado na Figura 6.6, por forma a exportar os respetivos momentos atuantes em cada direção X e Y para a folha de cálculo e prosseguir com os cálculos para a determinação da flecha que se quer obter.

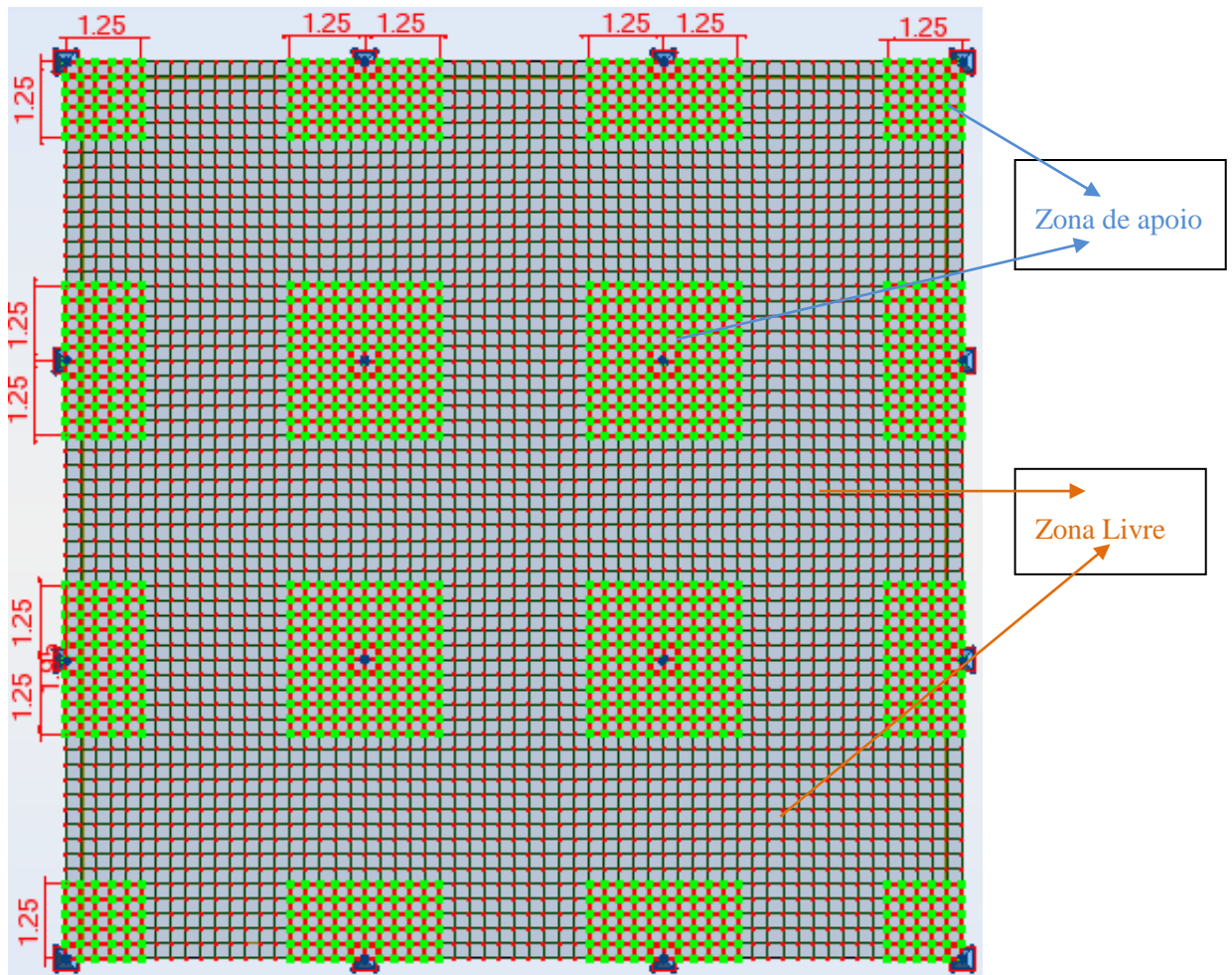


Figura 6.6 - Laje fungiforme simétrica 15*15 selecionada por zonas de secções iguais

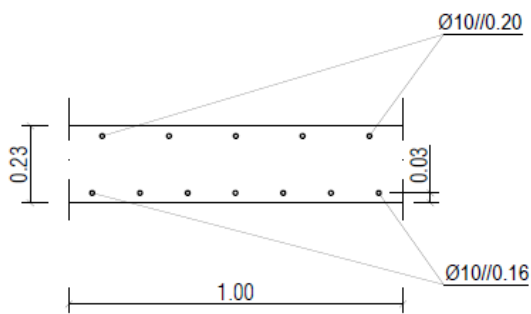


Figura 6.7 - Secção transversal da Zona Livre

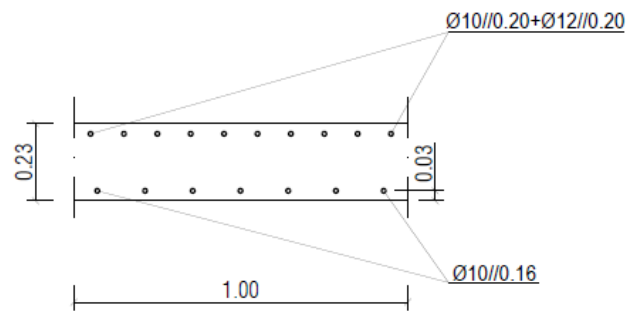


Figura 6.8 - Secção transversal da Zona de Apoio

- 3) Cálculo M_{cr} :
Secção: 1×0.22 C30/37

$$M_{cr} = \frac{f_{ctm} \times b \times h^2}{6} = \frac{2900 \times 1 \times 0.22^2}{6} = 23.4 \text{ kn.m}$$

- 4) Cálculo de I_{1x} , I_{1y} , I_{2x} e I_{2y} :

Sendo a estrutura simétrica e de vãos iguais nas duas direções, as armaduras serão idênticas para as duas direções, portanto para cada secção $I1x=I1y$ e $I2x=I2y$. Estes valores das inércias são calculados com auxílio de uma folha de cálculo em Excel, já referida anteriormente.

À semelhança do referido na subcapítulo anterior, no cálculo da flecha a longo prazo teremos 3 inércias para cada secção.

Considerando:

$$\alpha = \frac{Es}{E_{cm}} = \frac{200}{33} = 6.06$$

Quantidade e o posicionamento das armaduras conforme ilustrada na Figura 6.7 e Figura 6.8.

Resulta:

Zona livre

$$I1x=I1y= 0,00091547 \text{ m}^4$$

$$I2x=I2 (+) = 8,25318\text{E-}05 \text{ m}^4$$

$$I2x=I2y (-) = 7,01472\text{E-}05 \text{ m}^4$$

Zona de apoio

$$I1x=I1y = 0,000933602 \text{ m}^4$$

$$I2x=I2y (+) = 8,2532\text{E-}05 \text{ m}^4$$

$$I2x=I2y (-) = 0,00015242 \text{ m}^4$$

5) Cálculo das curvaturas:

Calculam-se os deslocamentos a curto prazo dos pontos A, B e C, calculando as curvaturas a partir a expressão (5.1), com $\beta = 1$ chegando aos seguintes resultados:

- Ponto A

Quadro 6.6 - Cálculo da flecha a curto prazo do ponto A (Laje simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	
1	Mcr =	23,4 kN.m			Ecm =	33 GPa															
2		Zona Apoio			Zona Livre																
3	I1 =	0,000933602 m^4			I1 =	0,00091547 m^4															
4																					
5	I2(+) =	8,2532E-05 m^4			I2(+) =	8,25318E-05 m^4															
6																					
7	I2(-) =	0,00015242 m^4			I2(-) =	7,01472E-05 m^4															
8																					
9	XX											YY									
10	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmxM 1xA			Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmxM 1xA	
11	17	0,0625	4,47	0,13	0	0,00015	0,00089	0,00015	0,000001			17	0,0625	4,47	-0,01	0	0,00015	0,00089	0,00015	0,000000	
12	18	0,0625	-0,94	0,05	0	-0,00003	-0,00035	-0,00003	0,000000			18	0,0625	-3,41	-0,04	0	-0,00011	-0,00125	-0,00011	0,000000	
13	19	0,0625	-2,02	0,02	0	-0,00007	-0,00074	-0,00007	0,000000			19	0,0625	-8,43	-0,05	0	-0,00027	-0,00310	-0,00027	0,000001	
909	3615	0,0625	61,87	-0,73	0,856955395	0,00201	0,01230	0,01083	-0,000494			3615	0,0625	53,62	-1,77	0,809551264	0,00174	0,01066	0,00896	-0,000991	
910	3616	0,0625	64,46	-0,43	0,868219512	0,00209	0,01282	0,01140	-0,000306			3616	0,0625	64,46	-0,43	0,868219512	0,00209	0,01282	0,01140	-0,000306	
911																					
912	21	0,0625	-3,14	-0,01	0	-0,00010	-0,00115	-0,00010	0,000000			21	0,0625	-15	-0,06	0	-0,00050	-0,00551	-0,00050	0,000002	
913	22	0,0625	-3,33	-0,01	0	-0,00011	-0,00122	-0,00011	0,000000			22	0,0625	-16,94	-0,06	0	-0,00056	-0,00622	-0,00056	0,000002	
914	23	0,0625	-3,43	-0,01	0	-0,00011	-0,00126	-0,00011	0,000000			23	0,0625	-18,16	-0,06	0	-0,00060	-0,00667	-0,00060	0,000002	
915	24	0,0625	-3,48	-0,01	0	-0,00012	-0,00128	-0,00012	0,000000			24	0,0625	-18,7	-0,06	0	-0,00062	-0,00687	-0,00062	0,000002	
916	25	0,0625	-3,51	-0,02	0	-0,00012	-0,00129	-0,00012	0,000000			25	0,0625	-18,6	-0,06	0	-0,00062	-0,00683	-0,00062	0,000002	

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,155210 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,155210 \text{ cm}$$

$$\delta A = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,155210 + 0,155210 = 0,310419 \text{ cm}$$

- Ponto B

Quadro 6.7 - Cálculo da flecha a curto prazo do ponto B (Laje simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	23,4 kN.m			Ecm =	33 GPa														
2	Zona Apoio			Zona Livre																
3	I1 =	0,000933602 m ⁴		I1 =	0,00091547 m ⁴															
5	I2(+) =	8,2532E-05 m ⁴		I2(+) =	8,25318E-05 m ⁴															
7	I2(-) =	0,00015242 m ⁴		I2(-) =	7,01472E-05 m ⁴															
XX											YY									
10	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmM 1xA		Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmM 1xA	
11	17	0,0625	4,47	0,09	0	0,00015	0,00089	0,00015	0,000001		17	0,0625	4,47	0,02	0	0,00015	0,00089	0,00015	0,000000	
12	18	0,0625	-0,94	0,03	0	-0,00003	-0,00035	-0,00003	0,000000		18	0,0625	-3,41	0	0	-0,00011	-0,00125	-0,00011	0,000000	
13	19	0,0625	-2,02	0,01	0	-0,00007	-0,00074	-0,00007	0,000000		19	0,0625	-8,43	-0,01	0	-0,00027	-0,00310	-0,00027	0,000000	
909	3615	0,0625	61,87	14,93	0,856955395	0,00201	0,01230	0,01083	0,010104		3615	0,0625	53,62	14,2	0,809551264	0,00174	0,01066	0,00896	0,007953	
910	3616	0,0625	64,46	12,48	0,868219512	0,00209	0,01282	0,01140	0,008894		3616	0,0625	64,46	4,8	0,868219512	0,00209	0,01282	0,01140	0,003421	
911																				
912	21	0,0625	-3,14	-0,01	0	-0,00010	-0,00115	-0,00010	0,000000		21	0,0625	-15	-0,02	0	-0,00050	-0,00551	-0,00050	0,000001	
913	22	0,0625	-3,33	-0,01	0	-0,00011	-0,00122	-0,00011	0,000000		22	0,0625	-16,94	-0,02	0	-0,00056	-0,00622	-0,00056	0,000000	
914	23	0,0625	-3,43	-0,01	0	-0,00011	-0,00126	-0,00011	0,000000		23	0,0625	-18,16	-0,02	0	-0,00060	-0,00667	-0,00060	0,000001	
915	24	0,0625	-3,48	-0,01	0	-0,00012	-0,00128	-0,00012	0,000000		24	0,0625	-18,7	-0,03	0	-0,00062	-0,00687	-0,00062	0,000001	
916	25	0,0625	-3,51	-0,01	0	-0,00012	-0,00129	-0,00012	0,000000		25	0,0625	-18,6	-0,03	0	-0,00062	-0,00683	-0,00062	0,000001	

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,174839 cm$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,103608 cm$$

$$\delta B = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,174839 + 0,103608 = 0,278447 cm$$

- Ponto C

Quadro 6.8 - Cálculo da flecha a curto prazo do ponto C (Laje simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	23,4 kN.m			Ecm =	33 GPa														
2	Zona Apoio			Zona Livre																
3	I1 =	0,000933602 m ⁴		I1 =	0,00091547 m ⁴															
5	I2(+) =	8,2532E-05 m ⁴		I2(+) =	8,25318E-05 m ⁴															
7	I2(-) =	0,00015242 m ⁴		I2(-) =	7,01472E-05 m ⁴															
XX											YY									
10	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmM 1xA		Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmM 1xA	
11	17	0,0625	4,47	-0,13	0	0,00015	0,00089	0,00015	-0,000001		17	0,0625	4,47	-0,13	0	0,00015	0,00089	0,00015	-0,000001	
12	18	0,0625	-0,94	-0,02	0	-0,00003	-0,00035	-0,00003	0,000000		18	0,0625	-3,41	0,01	0	-0,00011	-0,00125	-0,00011	0,000000	
13	19	0,0625	-2,02	0,01	0	-0,00007	-0,00074	-0,00007	0,000000		19	0,0625	-8,43	0,1	0	-0,00027	-0,00310	-0,00027	-0,000002	
909	3615	0,0625	61,87	3,93	0,856955395	0,00201	0,01230	0,01083	0,002660		3615	0,0625	53,62	10,41	0,809551264	0,00174	0,01066	0,00896	0,005831	
910	3616	0,0625	64,46	1,63	0,868219512	0,00209	0,01282	0,01140	0,001162		3616	0,0625	64,46	1,63	0,868219512	0,00209	0,01282	0,01140	0,001162	
911																				
912	21	0,0625	-3,14	0,03	0	-0,00010	-0,00115	-0,00010	0,000000		21	0,0625	-15	0,25	0	-0,00050	-0,00551	-0,00050	-0,000008	
913	22	0,0625	-3,33	0,04	0	-0,00011	-0,00122	-0,00011	0,000000		22	0,0625	-16,94	0,31	0	-0,00056	-0,00622	-0,00056	-0,000011	
914	23	0,0625	-3,43	0,04	0	-0,00011	-0,00126	-0,00011	0,000000		23	0,0625	-18,16	0,35	0	-0,00060	-0,00667	-0,00060	-0,000013	
915	24	0,0625	-3,48	0,04	0	-0,00012	-0,00128	-0,00012	0,000000		24	0,0625	-18,7	0,39	0	-0,00062	-0,00687	-0,00062	-0,000015	
916	25	0,0625	-3,51	0,04	0	-0,00012	-0,00129	-0,00012	0,000000		25	0,0625	-18,6	0,42	0	-0,00062	-0,00683	-0,00062	-0,000016	

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,133946 cm$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,133946 cm$$

$$\delta C = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,133946 + 0,133946 = 0,267892 cm$$

III. Cálculo das flechas a longo prazo

Mantêm-se todos os passos referentes ao cálculo das deformações a curto prazo, alterando apenas o módulo de elasticidade assim como as inércias, com a introdução da fluência, considerando um coeficiente de fluência para um tempo infinito de 2,5, valor que se considerou razoável para este tipo de materiais e de estruturas.

- Cálculo $E_{c,eff}$:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{(1 + \varphi)} = \frac{33}{(1 + 2.5)} = 9.43 Gpa$$

- Cálculo de I_{1x} , I_{1y} , I_{2x} e I_{2y} :

Foi utilizado o mesmo procedimento referido anteriormente para as deformações a curto prazo, introduzindo apenas o efeito da fluência.

Considerando:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{200}{9.43} = 21.2$$

Resulta:

Zona livre

$$I_{1x}=I_{1y}= 0,000999864 \text{ m}^4$$

$$I_{2x}=I_{2y} (+) = 0,000282717 \text{ m}^4$$

$$I_{2x}=I_{2y} (-) = 0,00020855 \text{ m}^4$$

Zona de apoio

$$I_{1x}=I_{1y} = 0,001070523 \text{ m}^4$$

$$I_{2x}=I_{2y} (+) = 0,000246566 \text{ m}^4$$

$$I_{2x}=I_{2y} (-) = 0,000421226 \text{ m}^4$$

- Cálculo das curvaturas:
À semelhança do referido no subcapítulo anterior, calculam-se os deslocamentos a longo prazo dos pontos A, B e C, com $\beta = 0.5$, chegando aos seguintes resultados:

- Ponto A

Quadro 6.9 - Cálculo da flecha a longo prazo do ponto A (Laje simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	23,4	kN.m		Ec,eff =	9,43	Gpa													
2	Zona Apoio			Zona Livre																
3	I1 =	0,001070523	m^4	I1 =	0,000999864	m^4														
4																				
5	I2(+) =	0,000246566	m^4	I2(+) =	0,000282717	m^4														
6																				
7	I2(-) =	0,000421226	m^4	I2(-) =	0,00020855	m^4														
8																				
9	XX								YY											
10	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmxM 1xA	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmxM 1xA		
11	17	0,0625	4,47	0,13	0,0000	0,00044	0,00113	0,00044	0,000004	17	0,0625	4,47	-0,01	0,0000	0,00044	0,00113	0,00044	0,000000		
12	18	0,0625	-0,94	0,05	0,0000	-0,00009	-0,00040	-0,00009	0,000000	18	0,0625	-3,41	-0,04	0,0000	-0,00034	-0,00147	-0,00034	0,000001		
13	19	0,0625	-2,02	0,02	0,0000	-0,00020	-0,00087	-0,00020	0,000000	19	0,0625	-8,43	-0,05	0,0000	-0,00084	-0,00363	-0,00084	0,000003		
909	3615	0,0625	61,87	-0,73	0,9285	0,00613	0,01558	0,01490	-0,000680	3615	0,0625	53,62	-1,77	0,9048	0,00531	0,01350	0,01272	-0,001407		
910	3616	0,0625	64,46	-0,43	0,9341	0,00639	0,01623	0,01558	-0,000419	3616	0,0625	64,46	-0,43	0,9341	0,00639	0,01623	0,01558	-0,000419		
911																				
912	21	0,0625	-3,14	-0,01	0,0000	-0,00033	-0,00118	-0,00033	0,000000	21	0,0625	-15	-0,06	0,0000	-0,00159	-0,00563	-0,00159	0,000006		
913	22	0,0625	-3,33	-0,01	0,0000	-0,00035	-0,00125	-0,00035	0,000000	22	0,0625	-16,94	-0,06	0,0000	-0,00180	-0,00635	-0,00180	0,000007		
914	23	0,0625	-3,43	-0,01	0,0000	-0,00036	-0,00129	-0,00036	0,000000	23	0,0625	-18,16	-0,06	0,0000	-0,00193	-0,00681	-0,00193	0,000007		
915	24	0,0625	-3,48	-0,01	0,0000	-0,00037	-0,00131	-0,00037	0,000000	24	0,0625	-18,7	-0,06	0,0000	-0,00198	-0,00701	-0,00198	0,000007		
916	25	0,0625	-3,51	-0,02	0,0000	-0,00037	-0,00132	-0,00037	0,000000	25	0,0625	-18,6	-0,06	0,0000	-0,00197	-0,00698	-0,00197	0,000007		

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,380903 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,380903 \text{ cm}$$

$$\delta A = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,380903 + 0,380903 = 0,761806 \text{ cm}$$

○ Ponto B

Quadro 6.10 - Cálculo da flecha a longo prazo do ponto B (Laje simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	23,4	kN.m		Ec,eff =	9,43	Gpa													
2	Zona Apoio			Zona Livre																
3	I1 =	0,001070523	m^4	I1 =	0,000999864	m^4														
4																				
5	I2(+) =	0,000246566	m^4	I2(+) =	0,000282717	m^4														
6																				
7	I2(-) =	0,000421226	m^4	I2(-) =	0,00020855	m^4														
8																				
9	XX								YY											
10	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmxM 1xA	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmxM 1xA		
11	17	0,0625	4,47	0,09	0,0000	0,00044	0,00113	0,00044	0,000002	17	0,0625	4,47	0,02	0,0000	0,00044	0,00113	0,00044	0,000001		
12	18	0,0625	-0,94	0,03	0,0000	-0,00009	-0,00040	-0,00009	0,000000	18	0,0625	-3,41	0	0,0000	-0,00034	-0,00147	-0,00034	0,000000		
13	19	0,0625	-2,02	0,01	0,0000	-0,00020	-0,00087	-0,00020	0,000000	19	0,0625	-8,43	-0,01	0,0000	-0,00084	-0,00363	-0,00084	0,000001		
909	3615	0,0625	61,87	14,93	0,9285	0,00613	0,01558	0,01490	0,013904	3615	0,0625	53,62	14,2	0,9048	0,00531	0,01350	0,01272	0,011288		
910	3616	0,0625	64,46	12,48	0,9341	0,00639	0,01623	0,01558	0,012152	3616	0,0625	64,46	4,8	0,9341	0,00639	0,01623	0,01558	0,004674		
911																				
912	21	0,0625	-3,14	-0,01	0,0000	-0,00033	-0,00118	-0,00033	0,000000	21	0,0625	-15	-0,02	0,0000	-0,00159	-0,00563	-0,00159	0,000002		
913	22	0,0625	-3,33	-0,01	0,0000	-0,00035	-0,00125	-0,00035	0,000000	22	0,0625	-16,94	-0,02	0,0000	-0,00180	-0,00635	-0,00180	0,000002		
914	23	0,0625	-3,43	-0,01	0,0000	-0,00036	-0,00129	-0,00036	0,000000	23	0,0625	-18,16	-0,02	0,0000	-0,00193	-0,00681	-0,00193	0,000002		
915	24	0,0625	-3,48	-0,01	0,0000	-0,00037	-0,00131	-0,00037	0,000000	24	0,0625	-18,7	-0,03	0,0000	-0,00198	-0,00701	-0,00198	0,000004		
916	25	0,0625	-3,51	-0,01	0,0000	-0,00037	-0,00132	-0,00037	0,000000	25	0,0625	-18,6	-0,03	0,0000	-0,00197	-0,00698	-0,00197	0,000004		

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,413076 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,210968 \text{ cm}$$

$$\delta B = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,413076 + 0,210968 = 0,624044 \text{ cm}$$

○ Ponto C

Quadro 6.11 - Cálculo da flecha a longo prazo do ponto C (Laje simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr = 23,4 kN.m				Ec,eff = 9,43 Gpa															
2	Zona Apoio			Zona Livre																
3	I1 = 0,001070523 m^4			I1 = 0,000999864 m^4																
4																				
5	I2(+) = 0,000246566 m^4			I2(+) = 0,000282717 m^4																
6																				
7	I2(-) = 0,000421226 m^4			I2(-) = 0,00020855 m^4																
8																				
9	XX									YY										
10	Elemento	A(m2)	M[kN/m]	M1[kN/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmxM 1xA		Elemento	A(m2)	M[kN/m]	M1[kN/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rmxM 1xA	
11	17	0,0625	4,47	-0,13	0,0000	0,00044	0,00113	0,00044	-0,000004		17	0,0625	4,47	-0,13	0,0000	0,00044	0,00113	0,00044	-0,000004	
12	18	0,0625	-0,94	-0,02	0,0000	-0,00009	-0,00040	-0,00009	0,000000		18	0,0625	-3,41	0,01	0,0000	-0,00034	-0,00147	-0,00034	0,000000	
13	19	0,0625	-2,02	0,01	0,0000	-0,00020	-0,00087	-0,00020	0,000000		19	0,0625	-8,43	0,1	0,0000	-0,00084	-0,00363	-0,00084	-0,000005	
909	3615	0,0625	61,87	3,93	0,9285	0,00613	0,01558	0,01490	0,003660		3615	0,0625	53,62	10,41	0,9048	0,00531	0,01350	0,01272	0,008276	
910	3616	0,0625	64,46	1,63	0,9341	0,00639	0,01623	0,01558	0,001587		3616	0,0625	64,46	1,63	0,9341	0,00639	0,01623	0,01558	0,001587	
911																				
912	21	0,0625	-3,14	0,03	0,0000	-0,00033	-0,00118	-0,00033	-0,000001		21	0,0625	-15	0,25	0,0000	-0,00159	-0,00563	-0,00159	-0,000025	
913	22	0,0625	-3,33	0,04	0,0000	-0,00035	-0,00125	-0,00035	-0,000001		22	0,0625	-16,94	0,31	0,0000	-0,00180	-0,00635	-0,00180	-0,000035	
914	23	0,0625	-3,43	0,04	0,0000	-0,00036	-0,00129	-0,00036	-0,000001		23	0,0625	-18,16	0,35	0,0000	-0,00193	-0,00681	-0,00193	-0,000042	
915	24	0,0625	-3,48	0,04	0,0000	-0,00037	-0,00131	-0,00037	-0,000001		24	0,0625	-18,7	0,39	0,0000	-0,00198	-0,00701	-0,00198	-0,000048	
916	25	0,0625	-3,51	0,04	0,0000	-0,00037	-0,00132	-0,00037	-0,000001		25	0,0625	-18,6	0,42	0,0000	-0,00197	-0,00698	-0,00197	-0,000052	

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,251267 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,251267 \text{ cm}$$

$$\delta C = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,251267 + 0,251267 = 0,502535 \text{ cm}$$

6.2 LAJE FUNGIFORME NÃO SIMÉTRICA

Apresenta-se em seguida uma laje fungiforme maciça com as mesmas características da laje apresentada no subcapítulo 6.1, com as dimensões em planta de 10×17 m2, considerando uma malha com afastamento de 5.0 m segundo X e com afastamento de 5.0;5.0;7.0 m, segundo Y, conforme apresentado na Figura 6.9.

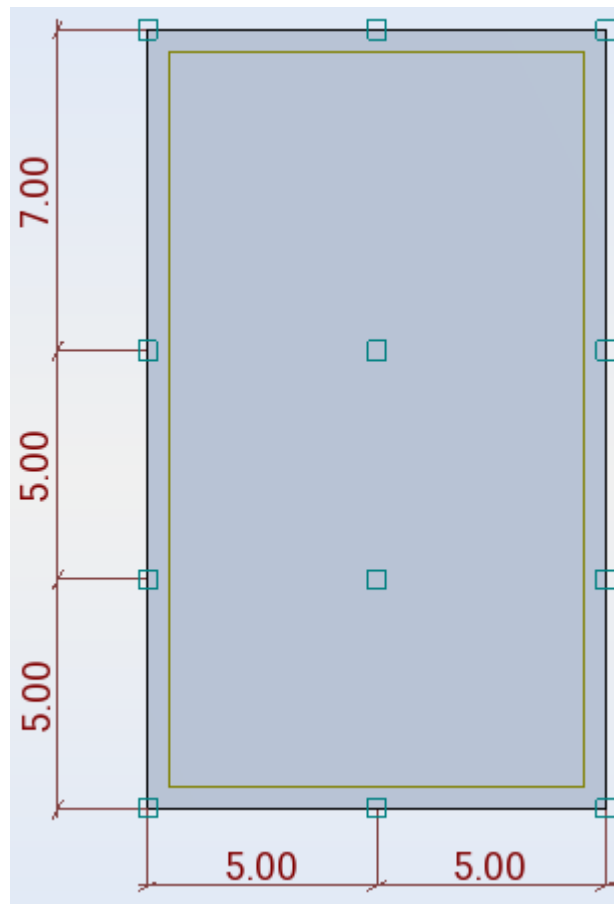


Figura 6.9 - Laje fungiforme não simétrica 10x17 m2

Tanto as ações, combinações como materiais utilizados nesta laje são os mesmos utilizados na laje anterior.

CALCULO DE DEFORMAÇÕES

Ir-se-ão também calcular os deslocamentos elásticos, bem como os deslocamentos a curto e longo prazo, para a combinação quase-permanente, referentes a 3 pontos A, B e C conforme ilustrado na Figura 6.10, e aplicando o método desenvolvido no subcapítulo 5.4.

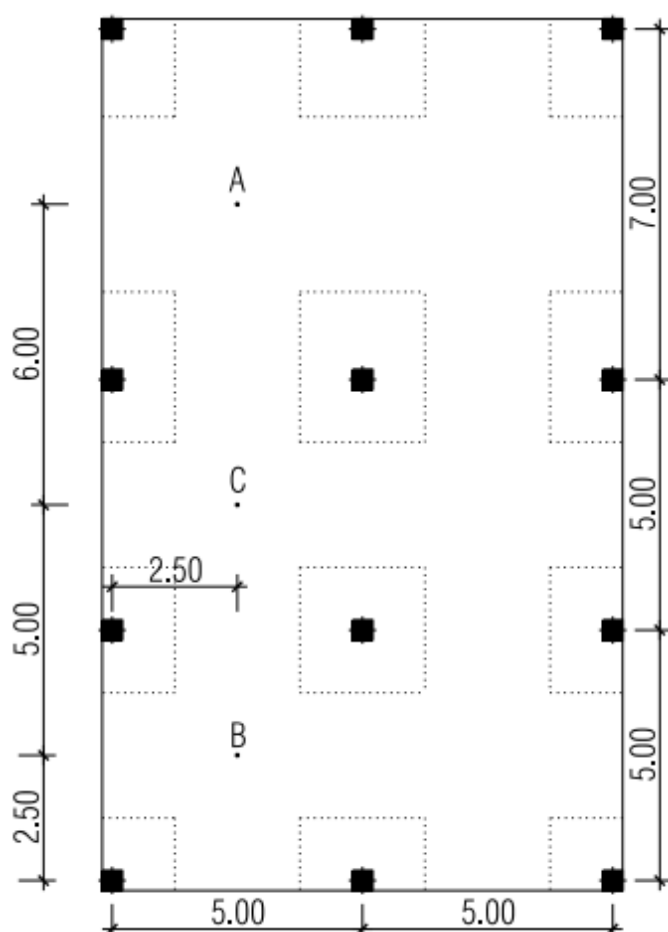


Figura 6.10 - Representação dos pontos a calcular os deslocamentos na laje não simétrica

- I. Cálculo das flechas elásticas
 - 1) Dividiu-se igualmente a laje em elementos finitos com dimensão 0.25×0.25 m² conforme se ilustra na figura abaixo indicada:

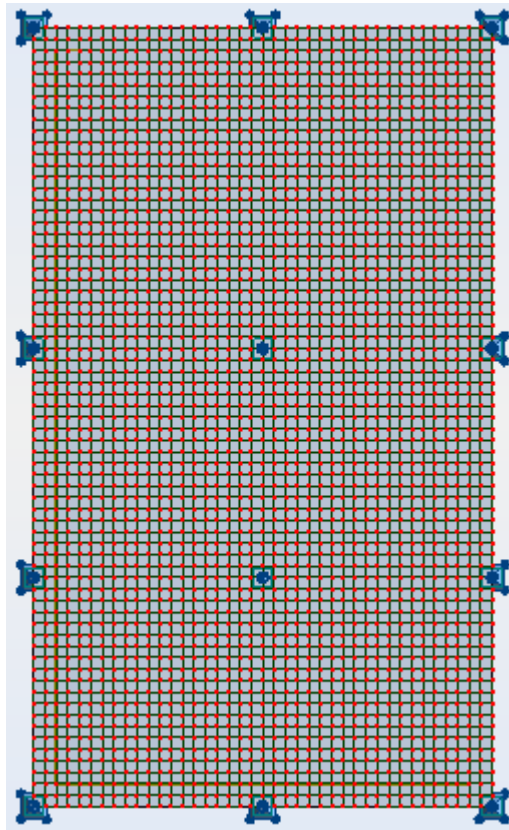


Figura 6.11 - Laje fungiforme 10x17 m2 devido em elementos finitos 0.25x0.25 m2

Os passos seguintes são exatamente iguais aos seguidos no exemplo anterior, visto que as cargas, combinações e materiais são exatamente os mesmos. Com isso, e adaptando a folha de cálculo para esta laje, devido à mudança de número de elementos finitos, chegou-se aos seguintes resultados:

- Ponto A:

Quadro 6.12 - Cálculo da flecha elástica para o ponto A (Laje não simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Ecm =	33	Gpa											
2														
3	Ic =	0,000887333	m^4											
4														
5														
6														
7														
8	XX					YY								
9	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A		
10	13	0,0625	4,24	0,01	0,00014	0,000000	13	0,0625	4,95	0,23	0,00017	0,000002		
11	14	0,0625	-3,54	-0,05	-0,00012	0,000000	14	0,0625	-0,72	0,08	-0,00002	0,000000		
12	15	0,0625	-8,37	-0,06	-0,00029	0,000001	15	0,0625	-1,93	0,03	-0,00007	0,000000		
13	16	0,0625	-12,03	-0,08	-0,00041	0,000002	16	0,0625	-2,77	0	-0,00009	0,000000		
14	27	0,0625	-1,93	-0,01	-0,00007	0,000000	27	0,0625	-2,78	0	-0,00009	0,000000		
15	28	0,0625	4,08	0,04	0,00014	0,000000	28	0,0625	-1,93	0,03	-0,00007	0,000000		
16	29	0,0625	11,49	0,09	0,00039	0,000002	29	0,0625	-0,42	0,07	-0,00001	0,000000		
17	30	0,0625	23,99	0,21	0,00082	0,000011	30	0,0625	3,89	0,19	0,00013	0,000002		

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,107298 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,415261 \text{ cm}$$

$$\delta A = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,107298 + 0,415261 = 0,522559 \text{ cm}$$

- Ponto B

Quadro 6.13 - Cálculo da flecha elástica para o ponto B (Laje não simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Ecm =	33	Gpa											
2														
3	Ic =	0,000887333	m^4											
4														
5														
6														
7														
8	XX					YY								
9	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A		
10	13	0,0625	4,24	3,22	0,00014	0,000029	13	0,0625	4,95	3,27	0,00017	0,000035		
11	14	0,0625	-3,54	-0,97	-0,00012	0,000007	14	0,0625	-0,72	0,1	-0,00002	0,000000		
12	15	0,0625	-8,37	-3,86	-0,00029	0,000069	15	0,0625	-1,93	-0,55	-0,00007	0,000002		
13	16	0,0625	-12,03	-6,3	-0,00041	0,000162	16	0,0625	-2,77	-0,97	-0,00009	0,000006		
14	27	0,0625	-1,93	-3,26	-0,00007	0,000013	27	0,0625	-2,78	-0,82	-0,00009	0,000005		
15	28	0,0625	4,08	-0,23	0,00014	-0,000002	28	0,0625	-1,93	-0,55	-0,00007	0,000002		
16	29	0,0625	11,49	3,25	0,00039	0,000080	29	0,0625	-0,42	-0,14	-0,00001	0,000000		
17	30	0,0625	23,99	8,05	0,00082	0,000412	30	0,0625	3,89	1,56	0,00013	0,000013		

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,091360 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,113796 \text{ cm}$$

$$\delta B = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,091360 + 0,113796 = 0,205156 \text{ cm}$$

- Ponto C

Quadro 6.14 - Cálculo da flecha elástica para o ponto C (Laje não simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Ecm =	33	Gpa											
2														
3	Ic =	0,000887333	m^4											
4														
5														
6														
7														
8	XX					YY								
9	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A		
10	13	0,0625	4,24	-0,18	0,00014	-0,000002	13	0,0625	4,95	-0,52	0,00017	-0,000005		
11	14	0,0625	-3,54	-0,04	-0,00012	0,000000	14	0,0625	-0,72	-0,12	-0,00002	0,000000		
12	15	0,0625	-8,37	-0,06	-0,00029	0,000001	15	0,0625	-1,93	0,02	-0,00007	0,000000		
13	16	0,0625	-12,03	-0,06	-0,00041	0,000002	16	0,0625	-2,77	0,12	-0,00009	-0,000001		
14	27	0,0625	-1,93	-0,02	-0,00007	0,000000	27	0,0625	-2,78	0,11	-0,00009	-0,000001		
15	28	0,0625	4,08	-0,05	0,00014	0,000000	28	0,0625	-1,93	0,05	-0,00007	0,000000		
16	29	0,0625	11,49	-0,1	0,00039	-0,000002	29	0,0625	-0,42	-0,05	-0,00001	0,000000		
17	30	0,0625	23,99	-0,3	0,00082	-0,000015	30	0,0625	3,89	-0,23	0,00013	-0,000002		

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,101168 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,010440 \text{ cm}$$

$$\delta c = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,101168 + 0,010440 = 0,111608 \text{ cm}$$

Os deslocamentos obtidos pelo programa de cálculo referentes aos pontos A, B e C são respetivamente iguais a 0,568 cm, 0,223 cm e 0,114 cm, conforme ilustrada na Figura 6.12. As diferenças encontradas entre os valores apresentados acima e os constantes da Figura 6.12 resultam do facto de na figura

serem apresentados os máximos locais e não os valores respeitantes aos nós A, B e C. (Os máximos ocorrem em pontos não exatamente coincidentes com A, B e C).

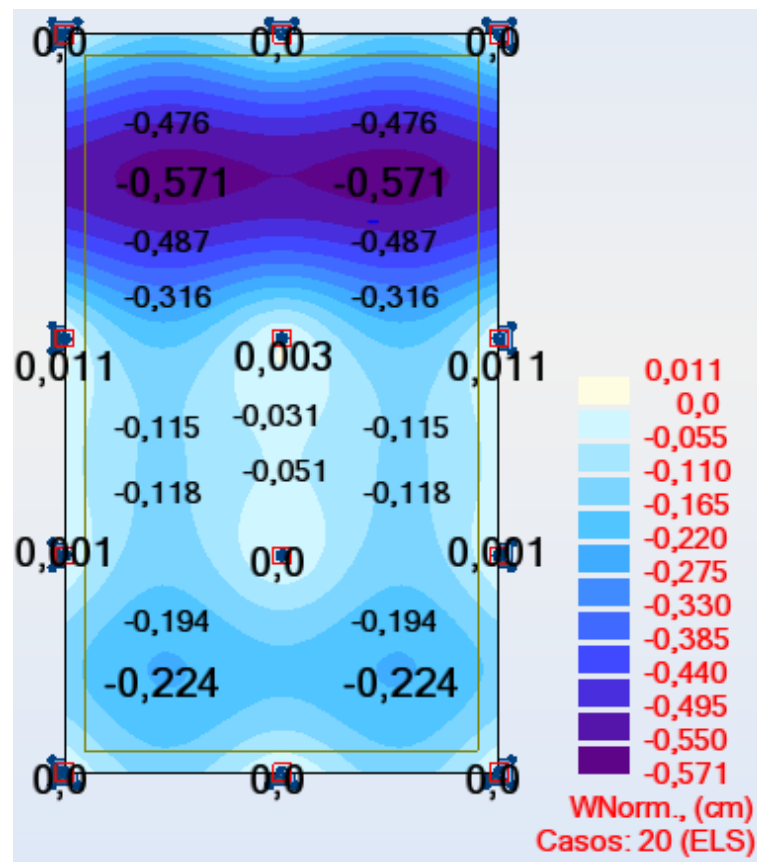


Figura 6.12 - Mapa dos deslocamentos sobre a Laje não simétrica para ELS

II. Cálculo das flechas a curto prazo (entrando com a fendilhação, mas não com a fluência)

- 1) A laje mantém-se dividida conforme ilustrado na Figura 6.11 em elementos finitos de $0,25 \times 0,25$ m²;
- 2) Fez-se o dimensionamento das armaduras à semelhança do exemplo anterior, utilizando os mesmos critérios. Neste caso, sendo a laje não simétrica, teremos esforços diferentes para cada direção e consequentemente armaduras diferentes para as mesmas, conforme ilustrado no Quadro 6.15.

Quadro 6.15 - Armaduras para cada direção na laje não simétrica

Direcção	Zona	Sinal	Msd do integral [kN.m/m*(m)]	Lzona [m]	Msd [kN.m/m]	U	W	As			As,efetivo [cm ² /m]
								[cm ² /m]	As-As,min fend	ϕ	
X	Apoio	M-	265,86	3	88,62	0,1227	0,1378	12,04	8,09	$\phi 16//0,2 + \phi 10//0,20$	14
	Livre	M+	-	-	35,16	0,0487	0,0511	4,46	-	$\phi 12//0,25$	4,52
Y	Apoio	M-	292,45	2,5	116,98	0,1620	0,1883	16,46	12,51	$\phi 20//0,25 + \phi 10//0,20$	16,51
	Livre	M+	-	-	61,93	0,0858	0,0931	8,14	-	$\phi 16//0,2$	10,05

- 3) Com isso, chegou-se a duas zonas idênticas para cada direção, mas com secções de armadura diferentes, conforme se ilustra nas figuras abaixo. A armadura indicada encontra-se em (nº de varões / metro de desenvolvimento).

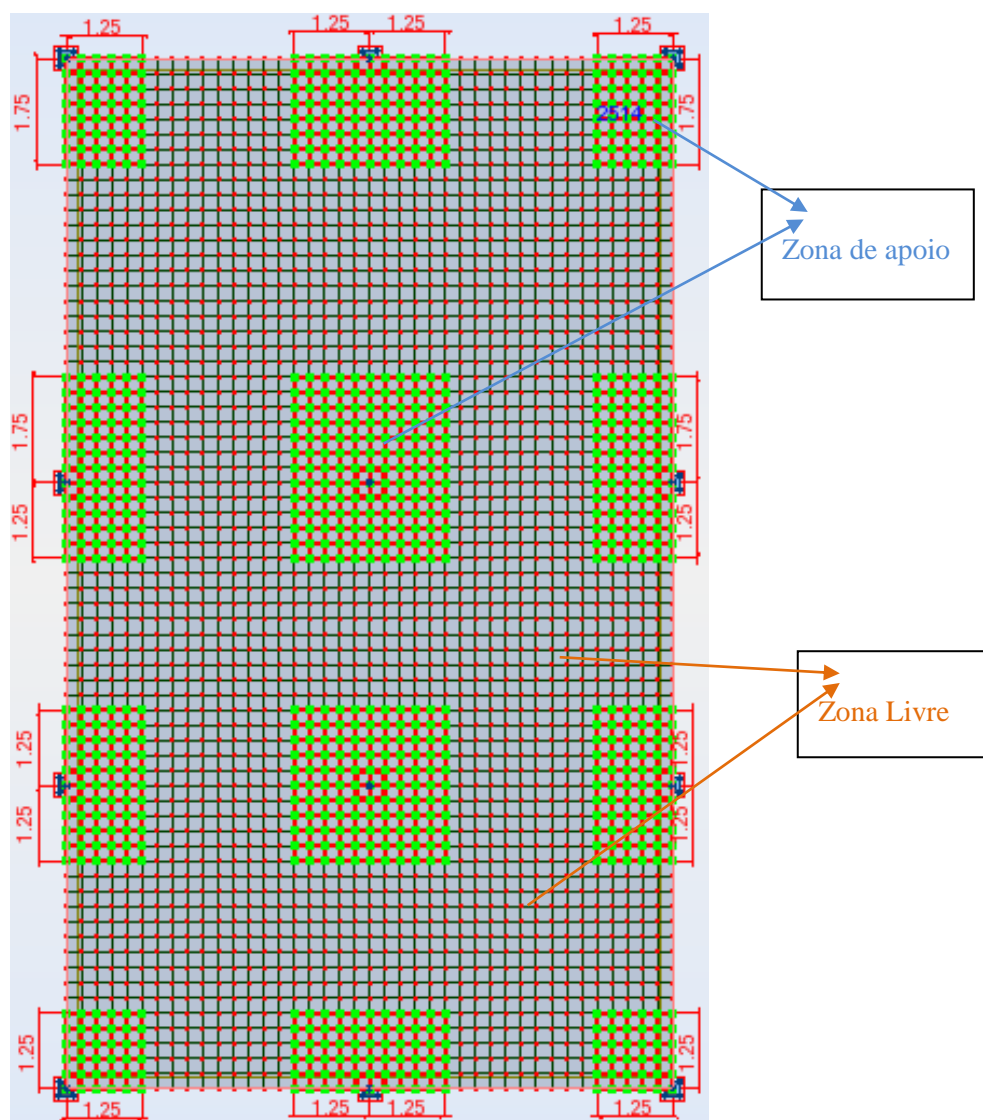


Figura 6.13 - Laje fungiforme 10*17 selecionada por zonas de secções iguais para as duas direções x e y

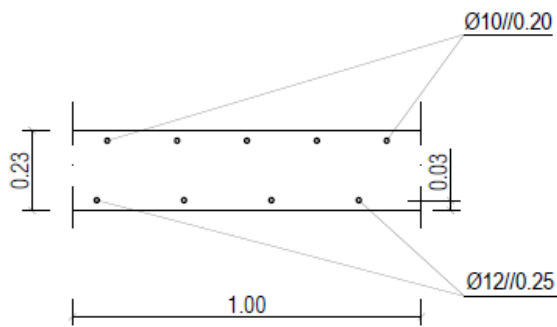


Figura 6.14 - Secção transversal da Zona Livre para direção Y

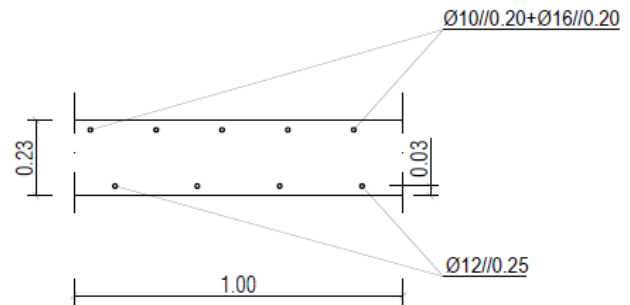


Figura 6.15 - Secção transversal da Zona de Apoio para direção Y

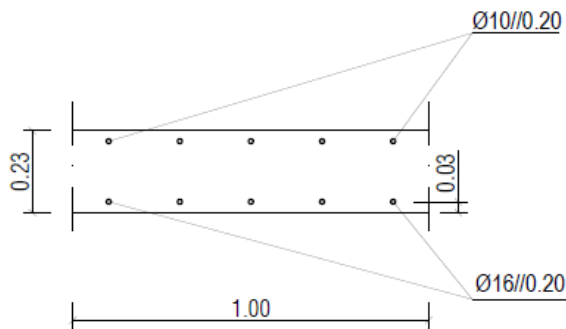


Figura 6.16 - Secção transversal da Zona Livre para direção X

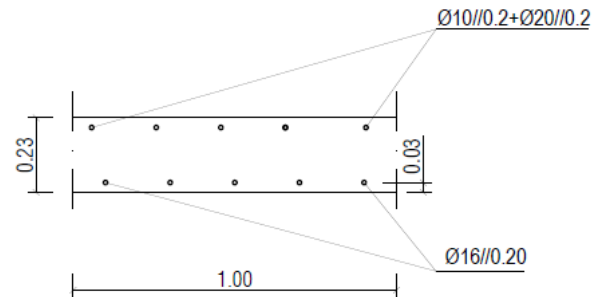


Figura 6.17 - Secção transversal da Zona de Apoio para direção X

M_{cr} e E_{cm} iguais à do exemplo anterior.

4) Cálculo de I_{1x} , I_{1y} , I_{2x} e I_{2y} :

Sendo a laje não simétrica e de vãos variáveis, aparecem armaduras diferentes para cada secção e para cada direção, conforme se ilustra nas figuras acima indicadas. Sendo assim, há para cada secção e referente a cada direção 3 inércias a calcular conforme mencionado anteriormente. Considerando o posicionamento e quantidade das armaduras conforme indicado nas figuras das secções transversais acima apresentadas, referentes a cada direção, e ainda $\alpha = 6.06$, resulta:

Zona livre

$$I_{1x} = 0,00091476 \text{ m}^4$$

$$I_{1y} = 0,000932402 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (+) = 7,91175\text{E-}05 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (+) = 0,000158385 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (-) = 7,01467\text{E-}05 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (-) = 7,01569E-05 \text{ m}^4$$

Zona de apoio

$$I_{1x} = 0,000946666 \text{ m}^4$$

$$I_{1y} = 0,000973052 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (+) = 7,9118E-05 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (+) = 0,000159184 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (-) = 0,000208674 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (-) = 0,000239763 \text{ m}^4$$

5) Cálculo das curvaturas:

A partir da folha de cálculo em Excel introduzindo os dados acima calculados, bem como os momentos exportados do programa de cálculo, chega-se aos resultados dos deslocamentos a curto prazo para a combinação quase-permanente de ações referentes aos pontos A, B e C, tomando em consideração a fendilhação:

- Ponto A

Quadro 6.16 - Cálculo da flecha a curto prazo do ponto A (Laje não simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	23,4 kN.m			Ecm =	33 Gpa														
2																				
3	Dados XX											Dados YY								
4	Zona Apoio			Zona Livre								Zona Apoio			Zona Livre					
5	I1 =	0,000946666	m^4	I1 =	0,00091476	m^4						I1 =	0,000973052	m^4	I1 =	0,000932402	m^4			
6	I2(+) =	7,9118E-05	m^4	I2(+) =	7,91175E-05	m^4						I2(+) =	0,000159184	m^4	I2(+) =	0,000158385	m^4			
7	I2(-) =	0,000208674	m^4	I2(-) =	7,01467E-05	m^4						I2(-) =	0,000239763	m^4	I2(-) =	7,01569E-05	m^4			
8																				
9																				
10																				
11	XX											YY								
12	Elemento	A(m2)	M[kNm/m]	M1[kNm/m]	Ç	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A			Elemento	A(m2)	M[kNm/m]	M1[kNm/m]	Ç	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A
13	13	0,0625	4,24	0,01	0	0,00014	0,00062	0,00014	0,000000			13	0,0625	4,95	0,23	0	0,00015	0,00063	0,00015	0,000002
689	2725	0,0625	62,65	-1,24	0,860495067	0,00201	0,00910	0,00811	-0,000628			2725	0,0625	66,12	-0,92	0,874753377	0,00206	0,00836	0,00757	-0,000435
690	2726	0,0625	62,65	-1,68	0,860495067	0,00201	0,00910	0,00811	-0,000851			2726	0,0625	66,12	-1,04	0,874753377	0,00206	0,00836	0,00757	-0,000492
691	2727	0,0625	58,86	-1,81	0,841951201	0,00188	0,00855	0,00749	-0,000848			2727	0,0625	50,06	-3,33	0,781500713	0,00156	0,00633	0,00529	-0,001100
692	2728	0,0625	58,86	-2,24	0,841951201	0,00188	0,00855	0,00749	-0,001049			2728	0,0625	50,06	-3,45	0,781500713	0,00156	0,00633	0,00529	-0,001140
693																				
694	17	0,0625	-14,66	-0,09	0	-0,00049	-0,00561	-0,00049	0,000003			17	0,0625	-3,16	-0,02	0	-0,00010	-0,00060	-0,00010	0,000000
695	18	0,0625	-16,47	-0,09	0	-0,00055	-0,00631	-0,00055	0,000003			18	0,0625	-3,38	-0,03	0	-0,00011	-0,00065	-0,00011	0,000000
696	19	0,0625	-17,56	-0,1	0	-0,00058	-0,00673	-0,00058	0,000004			19	0,0625	-3,5	-0,03	0	-0,00011	-0,00067	-0,00011	0,000000
697	20	0,0625	-17,97	-0,1	0	-0,00060	-0,00688	-0,00060	0,000004			20	0,0625	-3,57	-0,03	0	-0,00012	-0,00068	-0,00012	0,000000
698	21	0,0625	-17,75	-0,1	0	-0,00059	-0,00680	-0,00059	0,000004			21	0,0625	-3,6	-0,03	0	-0,00012	-0,00069	-0,00012	0,000000

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,180661 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 1,082893 \text{ cm}$$

$$\delta A = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,180661 + 1,082893 = 1,263554 \text{ cm}$$

- Ponto B

Quadro 6.17 - Cálculo da flecha a curto prazo do ponto B (Laje não simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T		
1	Mcr =	23,4 kN.m			Ecm =	33 Gpa																
2																						
3	Dados XX											Dados YY										
4	Zona Apoio					Zona Livre						Zona Apoio					Zona Livre					
5	I1 =	0,000946666	m ⁴		I1 =	0,00091476	m ⁴					I1 =	0,000973052	m ⁴		I1 =	0,000932402	m ⁴				
6																						
7	I2(+) =	7,9118E-05	m ⁴		I2(+) =	7,91175E-05	m ⁴					I2(+) =	0,000159184	m ⁴		I2(+) =	0,000158385	m ⁴				
8																						
9	I2(-) =	0,000208674	m ⁴		I2(-) =	7,01467E-05	m ⁴					I2(-) =	0,000239763	m ⁴		I2(-) =	7,01569E-05	m ⁴				
10																						
11	XX											YY										
12	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A			Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A		
13	13	0,0625	4,24	3,22	0	0,00014	0,00062	0,00014	0,000027			13	0,0625	4,95	3,27	0	0,00015	0,00063	0,00015	0,000032		
689	2725	0,0625	62,65	16,93	0,860495067	0,00201	0,00910	0,00811	0,008580			2725	0,0625	66,12	16,83	0,874753377	0,00206	0,00836	0,00757	0,007961		
690	2726	0,0625	62,65	5,06	0,860495067	0,00201	0,00910	0,00811	0,002564			2726	0,0625	66,12	13,79	0,874753377	0,00206	0,00836	0,00757	0,006523		
691	2727	0,0625	58,86	13,97	0,841951201	0,00188	0,00855	0,00749	0,006543			2727	0,0625	50,06	5,31	0,781500713	0,00156	0,00633	0,00529	0,001754		
692	2728	0,0625	58,86	2,05	0,841951201	0,00188	0,00855	0,00749	0,000960			2728	0,0625	50,06	2,22	0,781500713	0,00156	0,00633	0,00529	0,000733		
693																						
694	17	0,0625	-14,66	-8,32	0	-0,00049	-0,00561	-0,00049	0,000253			17	0,0625	-3,16	-1,11	0	-0,00010	-0,00060	-0,00010	0,000007		
695	18	0,0625	-16,47	-9,98	0	-0,00055	-0,00631	-0,00055	0,000340			18	0,0625	-3,38	-1,12	0	-0,00011	-0,00065	-0,00011	0,000008		
696	19	0,0625	-17,56	-11,24	0	-0,00058	-0,00673	-0,00058	0,000409			19	0,0625	-3,5	-1,07	0	-0,00011	-0,00067	-0,00011	0,000008		
697	20	0,0625	-17,97	-12,04	0	-0,00060	-0,00688	-0,00060	0,000448			20	0,0625	-3,57	-1	0	-0,00012	-0,00068	-0,00012	0,000007		
698	21	0,0625	-17,75	-12,32	0	-0,00059	-0,00680	-0,00059	0,000453			21	0,0625	-3,6	-0,95	0	-0,00012	-0,00069	-0,00012	0,000007		

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,127901 \text{ cm} \quad \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,143414 \text{ cm}$$

$$\delta B = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,127901 + 0,143414 = 0,271315 \text{ cm}$$

- Ponto C

Quadro 6.18 - Cálculo da flecha a curto prazo do ponto C (Laje não simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	23,4	kN.m		Ecm =	33	Gpa													
2																				
3	Dados XX										Dados YY									
4	Zona Apoio					Zona Livre					Zona Apoio					Zona Livre				
5	I1 =	0,000946666	m ⁴		I1 =	0,00091476	m ⁴					I1 =	0,000973052	m ⁴		I1 =	0,000932402	m ⁴		
6																				
7	I2(+) =	7,9118E-05	m ⁴		I2(+) =	7,91175E-05	m ⁴					I2(+) =	0,000159184	m ⁴		I2(+) =	0,000158385	m ⁴		
8																				
9	I2(-) =	0,000208674	m ⁴		I2(-) =	7,01467E-05	m ⁴					I2(-) =	0,000239763	m ⁴		I2(-) =	7,01569E-05	m ⁴		
10																				
11	XX										YY									
12	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A			Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A
13	13	0,0625	4,24	-0,18	0	0,00014	0,00062	0,00014	-0,000002			13	0,0625	4,95	-0,52	0	0,00015	0,00063	0,00015	-0,000005
689	2725	0,0625	62,65	12,63	0,860495067	0,00201	0,00910	0,00811	0,006401			2725	0,0625	66,12	4,72	0,874753377	0,00206	0,00836	0,00757	0,002233
690	2726	0,0625	62,65	1,6	0,860495067	0,00201	0,00910	0,00811	0,000811			2726	0,0625	66,12	1,88	0,874753377	0,00206	0,00836	0,00757	0,000889
691	2727	0,0625	58,86	15,14	0,841951201	0,00188	0,00855	0,00749	0,007092			2727	0,0625	50,06	14,38	0,781500713	0,00156	0,00633	0,00529	0,004750
692	2728	0,0625	58,86	4,15	0,841951201	0,00188	0,00855	0,00749	0,001944			2728	0,0625	50,06	11,59	0,781500713	0,00156	0,00633	0,00529	0,003828
693																				
694	17	0,0625	-14,66	-0,07	0	-0,00049	-0,00561	-0,00049	0,000002			17	0,0625	-3,16	0,17	0	-0,00010	-0,00060	-0,00010	-0,000001
695	18	0,0625	-16,47	-0,08	0	-0,00055	-0,00631	-0,00055	0,000003			18	0,0625	-3,38	0,2	0	-0,00011	-0,00065	-0,00011	-0,000001
696	19	0,0625	-17,56	-0,09	0	-0,00058	-0,00673	-0,00058	0,000003			19	0,0625	-3,5	0,22	0	-0,00011	-0,00067	-0,00011	-0,000002
697	20	0,0625	-17,97	-0,09	0	-0,00060	-0,00688	-0,00060	0,000003			20	0,0625	-3,57	0,23	0	-0,00012	-0,00068	-0,00012	-0,000002
698	21	0,0625	-17,75	-0,08	0	-0,00059	-0,00680	-0,00059	0,000003			21	0,0625	-3,6	0,23	0	-0,00012	-0,00069	-0,00012	-0,000002

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,170812 \text{ cm} \quad \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,020526 \text{ cm}$$

$$\delta C = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,170812 + 0,020526 = 0,191338 \text{ cm}$$

III. Cálculo das flechas a longo prazo

O cálculo é análogo ao apresentado anteriormente, diferindo apenas na consideração da fluência, tendo sido adotado o valor de $\varphi = 2.5$ (coeficiente de fluência).

Os valores de M_{cr} e $E_{c,eff}$ foram já calculados no ponto III do exemplo anterior a este, tendo sido adotados os mesmos valores nesta situação.

Cálculo de I_{1x} , I_{1y} , I_{2x} e I_{2y} :

Zona livre

$$I_{1x} = 0,001064412 \text{ m}^4$$

$$I_{1y} = 0,000996798 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (+) = 0,000433448 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (+) = 0,000232604 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (-) = 0,000210862 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (-) = 0,000208426 \text{ m}^4$$

Zona de apoio

$$I_{1x} = 0,001226719 \text{ m}^4$$

$$I_{1y} = 0,001117642 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (+) = 0,000462078 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (+) = 0,000238181 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (-) = 0,000643943 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (-) = 0,000551317 \text{ m}^4$$

Cálculo das curvaturas:

Mais uma vez, a partir da folha de cálculo em Excel introduzindo os dados acima calculados e os momentos exportados do programa de cálculo, chega-se aos resultados dos deslocamentos a longo prazo para a combinação quase-permanente de ações, referentes aos pontos A, B e C:

- Ponto A

Quadro 6.19 - Cálculo da flecha a longo prazo para o ponto A (Laje não simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	23,4	kN.m		Ec,eff =	9,43	Gpa													
2																				
3	Dados XX										Dados YY									
4	Zona Apoio					Zona Livre					Zona Apoio					Zona Livre				
5	I1 =	0,001117642	m^4		I1 =	0,000996798	m^4				I1 =	0,0012267	m^4		I1 =	0,001064412	m^4			
6																				
7	I2(+) =	0,000238181	m^4		I2(+) =	0,000232604	m^4				I2(+) =	0,0004621	m^4		I2(+) =	0,000433448	m^4			
8																				
9	I2(-) =	0,000551317	m^4		I2(-) =	0,000208426	m^4				I2(-) =	0,0006439	m^4		I2(-) =	0,000210862	m^4			
10																				
11	XX										YY									
12	Elemento	A(m2)	M[kNm/m]	M1[kNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A		Elemento	A(m2)	M[kNm/m]	M1[kNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A	
13	13	0,0625	4,24	0,01	0	0,00040	0,00082	0,00040	0,000000		13	0,0625	4,95	0,23	0	0,00043	0,00082	0,00043	0,000006	
689	2725	0,0625	62,65	-1,24	0,930247534	0,00594	0,01205	0,01162	-0,000901		2725	0,0625	66,12	-0,92	0,937376688	0,00572	0,01089	0,01056	-0,000607	
690	2726	0,0625	62,65	-1,68	0,930247534	0,00594	0,01205	0,01162	-0,001221		2726	0,0625	66,12	-1,04	0,937376688	0,00572	0,01089	0,01056	-0,000687	
691	2727	0,0625	58,86	-1,81	0,920975601	0,00558	0,01132	0,01087	-0,001229		2727	0,0625	50,06	-3,33	0,890750356	0,00433	0,00824	0,00782	-0,001627	
692	2728	0,0625	58,86	-2,24	0,920975601	0,00558	0,01132	0,01087	-0,001522		2728	0,0625	50,06	-3,45	0,890750356	0,00433	0,00824	0,00782	-0,001685	
693																				
694	17	0,0625	-14,66	-0,09	0	-0,00156	-0,00668	-0,00156	0,000009		17	0,0625	-3,16	-0,02	0	-0,00031	-0,00077	-0,00031	0,000000	
695	18	0,0625	-16,47	-0,09	0	-0,00175	-0,00751	-0,00175	0,000010		18	0,0625	-3,38	-0,03	0	-0,00034	-0,00083	-0,00034	0,000001	
696	19	0,0625	-17,56	-0,1	0	-0,00187	-0,00801	-0,00187	0,000012		19	0,0625	-3,5	-0,03	0	-0,00035	-0,00086	-0,00035	0,000001	
697	20	0,0625	-17,97	-0,1	0	-0,00191	-0,00819	-0,00191	0,000012		20	0,0625	-3,57	-0,03	0	-0,00036	-0,00087	-0,00036	0,000001	
698	21	0,0625	-17,75	-0,1	0	-0,00189	-0,00809	-0,00189	0,000012		21	0,0625	-3,6	-0,03	0	-0,00036	-0,00088	-0,00036	0,000001	

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,399930 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 2,152790 \text{ cm}$$

$$\delta A = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,399930 + 2,152790 = 2,552720 \text{ cm}$$

- Ponto B

Quadro 6.20 - Cálculo da flecha a longo prazo para o ponto B (Laje não simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	23,4	kN.m		Ec,eff =	9,43	Gpa													
2																				
3	Dados XX										Dados YY									
4	Zona Apoio					Zona Livre					Zona Apoio					Zona Livre				
5	I1 =	0,001117642	m^4		I1 =	0,000996798	m^4					I1 =	0,0012267	m^4		I1 =	0,001064412	m^4		
6																				
7	I2(+) =	0,000238181	m^4		I2(+) =	0,000232604	m^4					I2(+) =	0,0004621	m^4		I2(+) =	0,000433448	m^4		
8																				
9	I2(-) =	0,000551317	m^4		I2(-) =	0,000208426	m^4					I2(-) =	0,0006439	m^4		I2(-) =	0,000210862	m^4		
10																				
11	XX										YY									
12	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A			Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A
13	13	0,0625	4,24	3,22	0	0,00040	0,00082	0,00040	0,000081			13	0,0625	4,95	3,27	0	0,00043	0,00082	0,00043	0,000087
689	2725	0,0625	62,65	16,93	0,930247534	0,00594	0,01205	0,01162	0,012300			2725	0,0625	66,12	16,83	0,937376688	0,00572	0,01089	0,01056	0,011113
690	2726	0,0625	62,65	5,06	0,930247534	0,00594	0,01205	0,01162	0,003676			2726	0,0625	66,12	13,79	0,937376688	0,00572	0,01089	0,01056	0,009105
691	2727	0,0625	58,86	13,97	0,920975601	0,00558	0,01132	0,01087	0,009489			2727	0,0625	50,06	5,31	0,890750356	0,00433	0,00824	0,00782	0,002594
692	2728	0,0625	58,86	2,05	0,920975601	0,00558	0,01132	0,01087	0,001392			2728	0,0625	50,06	2,22	0,890750356	0,00433	0,00824	0,00782	0,001084
693																				
694	17	0,0625	-14,66	-8,32	0	-0,00156	-0,00668	-0,00156	0,000811			17	0,0625	-3,16	-1,11	0	-0,00031	-0,00077	-0,00031	0,000022
695	18	0,0625	-16,47	-9,98	0	-0,00175	-0,00751	-0,00175	0,001093			18	0,0625	-3,38	-1,12	0	-0,00034	-0,00083	-0,00034	0,000024
696	19	0,0625	-17,56	-11,24	0	-0,00187	-0,00801	-0,00187	0,001312			19	0,0625	-3,5	-1,07	0	-0,00035	-0,00086	-0,00035	0,000025
697	20	0,0625	-17,97	-12,04	0	-0,00191	-0,00819	-0,00191	0,001439			20	0,0625	-3,57	-1	0	-0,00036	-0,00087	-0,00036	0,000022
698	21	0,0625	-17,75	-12,32	0	-0,00189	-0,00809	-0,00189	0,001454			21	0,0625	-3,6	-0,95	0	-0,00036	-0,00088	-0,00036	0,000021

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,321565 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,362324 \text{ cm}$$

$$\delta B = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,321565 + 0,362324 = 0,683889 \text{ cm}$$

- Ponto C

Quadro 6.21 - Cálculo da flecha a longo prazo para o ponto C (Laje não simétrica)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	23,4	kN.m		Ec,eff =	9,43	Gpa													
2																				
3	Dados XX										Dados YY									
4	Zona Apoio					Zona Livre					Zona Apoio					Zona Livre				
5	I1 =	0,001117642	m^4		I1 =	0,000996798	m^4					I1 =	0,0012267	m^4		I1 =	0,001064412	m^4		
6																				
7	I2(+) =	0,000238181	m^4		I2(+) =	0,000232604	m^4					I2(+) =	0,0004621	m^4		I2(+) =	0,000433448	m^4		
8																				
9	I2(-) =	0,000551317	m^4		I2(-) =	0,000208426	m^4					I2(-) =	0,0006439	m^4		I2(-) =	0,000210862	m^4		
10																				
11	XX										YY									
12	Elemento	A(m2)	M[kN/m]	M1[kN/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A			Elemento	A(m2)	M[kN/m]	M1[kN/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A
13	13	0,0625	4,24	-0,18	0	0,00040	0,00082	0,00040	-0,000005			13	0,0625	4,95	-0,52	0	0,00043	0,00082	0,00043	-0,000014
689	2725	0,0625	62,65	12,63	0,930247534	0,00594	0,01205	0,01162	0,009176			2725	0,0625	66,12	4,72	0,937376688	0,00572	0,01089	0,01056	0,003117
690	2726	0,0625	62,65	1,6	0,930247534	0,00594	0,01205	0,01162	0,001162			2726	0,0625	66,12	1,88	0,937376688	0,00572	0,01089	0,01056	0,001241
691	2727	0,0625	58,86	15,14	0,920975601	0,00558	0,01132	0,01087	0,010284			2727	0,0625	50,06	14,38	0,890750356	0,00433	0,00824	0,00782	0,007025
692	2728	0,0625	58,86	4,15	0,920975601	0,00558	0,01132	0,01087	0,002819			2728	0,0625	50,06	11,59	0,890750356	0,00433	0,00824	0,00782	0,005662
693																				
694	17	0,0625	-14,66	-0,07	0	-0,00156	-0,00668	-0,00156	0,000007			17	0,0625	-3,16	0,17	0	-0,00031	-0,00077	-0,00031	-0,000003
695	18	0,0625	-16,47	-0,08	0	-0,00175	-0,00751	-0,00175	0,000009			18	0,0625	-3,38	0,2	0	-0,00034	-0,00083	-0,00034	-0,000004
696	19	0,0625	-17,56	-0,09	0	-0,00187	-0,00801	-0,00187	0,000011			19	0,0625	-3,5	0,22	0	-0,00035	-0,00086	-0,00035	-0,000005
697	20	0,0625	-17,97	-0,09	0	-0,00191	-0,00819	-0,00191	0,000011			20	0,0625	-3,57	0,23	0	-0,00036	-0,00087	-0,00036	-0,000005
698	21	0,0625	-17,75	-0,08	0	-0,00189	-0,00809	-0,00189	0,000009			21	0,0625	-3,6	0,23	0	-0,00036	-0,00088	-0,00036	-0,000005

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,379622 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,008588 \text{ cm}$$

$$\delta C = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,379622 + 0,008588 = 0,388210 \text{ cm}$$

Os mapas de momentos fletores são apresentados no Anexo B, referente aos 2 exemplos apresentados.

6.3 EXEMPLO VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

Apresenta-se uma viga simplesmente apoiada com uma secção retangular 0.30×0.60m² e já devidamente armada conforme representado na Figura 6.18. Dados: Betão C25/30 ($\varphi(\infty, 28) = 2.5$, $\chi = 0.8$), aço A400 NR. A viga esta sujeita a uma carga para a combinação quase permanente de ações de $Ed = 20 \text{ kN/m}$.

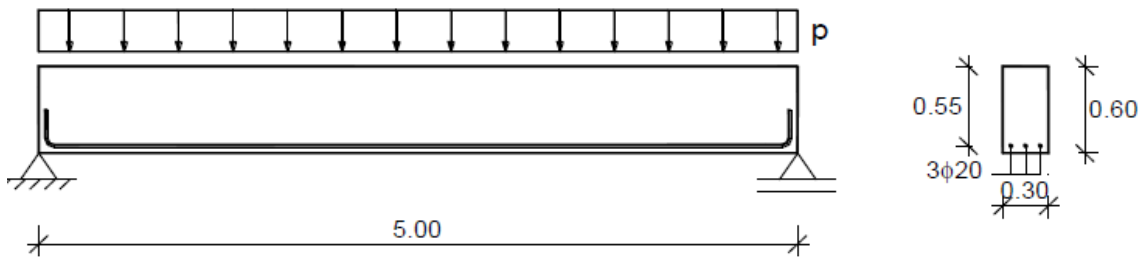


Figura 6.18 - Viga simplesmente apoiada com representação da secção transversal

Vão-se calcular a flecha máxima elástica, a curto e a longo prazo para combinação quase-permanente de ação.

I. Cálculo da flecha elástica

- 1) A viga foi dividida em varias secções com 0.25m de comprimento (Δx) (0.125 m nos extremos)
- 2) M_{cr} e $E_{c,eff}$ – não aplicáveis a este caso, visto que não se considera a fendilhação nem a fluência.
- 3) Inércia (Considerando apenas a contribuição do betão):
Secção: $0.30 \times 0.60 \text{ m}^2$ C25/30

$$I_1 = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{0.3 \times 0.6^3}{12} = 0,0054 \text{ m}^4$$

- 4) Com auxílio da folha de cálculo desenvolvida em Excel já referida, chegou-se ao seguinte valor da flecha elástica máxima conforme ilustra o Quadro 6.22.

Quadro 6.22 - Cálculo da flecha elástica a meio vão da viga

	A	B	C	D	E	F
1	Ecm =	31	Gpa			
2						
3	lc =	0,0054	m ⁴			
4						
5	Δ =	0,25	m			
6						
7						
8						
9	Ponto	M[kN/m]	M1[kN/m]	1/r	1/r * M1 * Δ	
10	1	0	0	0,00000	0,000000	
11	2	11,87	0,13	0,00007	0,000002	
12	3	22,49	0,25	0,00013	0,000008	
13	4	31,87	0,38	0,00019	0,000018	
14	5	39,99	0,5	0,00024	0,000030	
15	6	46,86	0,63	0,00028	0,000044	
16	7	52,49	0,75	0,00031	0,000059	
17	8	56,86	0,88	0,00034	0,000075	
18	9	59,99	1	0,00036	0,000090	
19	10	61,86	1,13	0,00037	0,000104	
20	11	62,49	1,25	0,00037	0,000117	
21	12	61,86	1,13	0,00037	0,000104	
22	13	59,99	1	0,00036	0,000090	
23	14	56,86	0,88	0,00034	0,000075	
24	15	52,49	0,75	0,00031	0,000059	
25	16	46,86	0,63	0,00028	0,000044	
26	17	39,99	0,5	0,00024	0,000030	
27	18	31,87	0,38	0,00019	0,000018	
28	19	22,49	0,25	0,00013	0,000008	
29	20	11,87	0,13	0,00007	0,000002	
30	21	0	0	0,00000	0,000000	
31						
32				Σ =	0,097714	cm

II. Cálculo da flecha a curto prazo

- 1) A viga manteve-se dividida de forma idêntica à considerada no cálculo anterior:
- 2) Cálculo M_{cr} e E_{c,eff}:

Secção: $0.30 \times 0.60 \text{ m}^2$ C25/30

$$M_{cr} = \frac{(f_{ctm} \times b \times h^2)}{6} = \frac{2600 \times 0.3 \times 0.6^2}{6} = 46.8 \text{ kn.m}$$

$$E_{c,eff} = E_{cm} = 31 \text{ Gpa}$$

- 3) Cálculo de I1 e I2:

Como podemos observar na Figura 6.18, a viga é armada igualmente ao longo de todo o seu comprimento, não sendo considerado qualquer escalonamento de armaduras. Portanto, será apenas necessário calcular I1 e I2 para a secção esquematizada na mesma figura.

Considerando:

$$\alpha = E_s / (E_{cm}) = 200 / 31 = 6.45$$

Quantidade e o posicionamento das armaduras conforme ilustrado na Figura 6.18.

Resulta:

$$I1 = 0,005711971 \text{ m}^4$$

$$I2 = 0,001291482 \text{ m}^4$$

4) Cálculo das curvaturas:

Quadro 6.23 - Cálculo da flecha a curto prazo a meio vão da viga

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Mcr =	46,8	kN.m		Ec,eff =	31	Gpa		
2									
3	I1 =	0,0057	m4		Δx =	0,25	m		
4									
5	I2 =	0,0013	m4						
6									
7									
8	Ponto	M[KN/m]	M1[KN/m]	ζ	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*Δ	
9	1	0	0	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,000000	
10	2	11,87	0,13	0	0,00007	0,00030	0,00007	0,000002	
11	3	22,49	0,25	0	0,00013	0,00056	0,00013	0,000008	
12	4	31,87	0,38	0	0,00018	0,00080	0,00018	0,000017	
13	5	39,99	0,5	0	0,00023	0,00100	0,00023	0,000028	
14	6	46,86	0,63	0,50127959	0,00026	0,00117	0,00072	0,000113	
15	7	52,49	0,75	0,602526147	0,00030	0,00131	0,00091	0,000170	
16	8	56,86	0,88	0,661274416	0,00032	0,00142	0,00105	0,000231	
17	9	59,99	1	0,695698575	0,00034	0,00150	0,00115	0,000286	
18	10	61,86	1,13	0,713818287	0,00035	0,00155	0,00120	0,000340	
19	11	62,49	1,25	0,719559546	0,00035	0,00156	0,00122	0,000382	
20	12	61,86	1,13	0,713818287	0,00035	0,00155	0,00120	0,000340	
21	13	59,99	1	0,695698575	0,00034	0,00150	0,00115	0,000286	
22	14	56,86	0,88	0,661274416	0,00032	0,00142	0,00105	0,000231	
23	15	52,49	0,75	0,602526147	0,00030	0,00131	0,00091	0,000170	
24	16	46,86	0,63	0,50127959	0,00026	0,00117	0,00072	0,000113	
25	17	39,99	0,5	0	0,00023	0,00100	0,00023	0,000028	
26	18	31,87	0,38	0	0,00018	0,00080	0,00018	0,000017	
27	19	22,49	0,25	0	0,00013	0,00056	0,00013	0,000008	
28	20	11,87	0,13	0	0,00007	0,00030	0,00007	0,000002	
29	21	0	0	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,000000	
30									
31							Σ =	0,277310	cm

III. Cálculo da flecha a longo prazo

O cálculo é análogo ao apresentado anteriormente, diferindo apenas na consideração da fluência, tendo sido adotado o valor de $\varphi = 2.5$ (coeficiente de fluência).

O valor de Mcr foi já calculado no ponto II, tendo sido adotado o mesmo valor nesta situação.

Cálculo do Ec,eff:

C25/30

$$Ec, eff = \frac{Ecm}{(1 + \varphi)} = \frac{31}{(1 + 2.5)} = 8.86 Gpa$$

Cálculo de I1 e I2:

Considerando:

$$\alpha = E_s / (E_c, eff) = 200 / 8.86 = 22.57$$

Resulta:

$$I_1 = 0,006541121 \text{ m}^4$$

$$I_2 = 0,003379433 \text{ m}^4$$

Cálculo das curvaturas:

Quadro 6.24 - Cálculo da flecha a longo prazo a meio vão da viga

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	M _{cr} =	46,8 kN.m			E _{c,eff} =	8,86 Gpa			
2									
3	I ₁ =	0,0065411 m ⁴			Δx =	0,25 m			
4									
5	I ₂ =	0,0033794 m ⁴							
6									
7									
8	Ponto	M[KN/m]	M1[KN/m]	ζ	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*Δ	
9	1	0	0	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,000000	
10	2	11,87	0,13	0	0,00020	0,00040	0,00020	0,000007	
11	3	22,49	0,25	0	0,00039	0,00075	0,00039	0,000024	
12	4	31,87	0,38	0	0,00055	0,00106	0,00055	0,000052	
13	5	39,99	0,5	0	0,00069	0,00134	0,00069	0,000086	
14	6	46,86	0,63	0,5013	0,00081	0,00157	0,00119	0,000187	
15	7	52,49	0,75	0,6025	0,00091	0,00175	0,00142	0,000266	
16	8	56,86	0,88	0,6613	0,00098	0,00190	0,00159	0,000349	
17	9	59,99	1	0,6957	0,00104	0,00200	0,00171	0,000427	
18	10	61,86	1,13	0,7138	0,00107	0,00207	0,00178	0,000503	
19	11	62,49	1,25	0,7196	0,00108	0,00209	0,00180	0,000564	
20	12	61,86	1,13	0,7138	0,00107	0,00207	0,00178	0,000503	
21	13	59,99	1	0,6957	0,00104	0,00200	0,00171	0,000427	
22	14	56,86	0,88	0,6613	0,00098	0,00190	0,00159	0,000349	
23	15	52,49	0,75	0,6025	0,00091	0,00175	0,00142	0,000266	
24	16	46,86	0,63	0,5013	0,00081	0,00157	0,00119	0,000187	
25	17	39,99	0,5	0	0,00069	0,00134	0,00069	0,000086	
26	18	31,87	0,38	0	0,00055	0,00106	0,00055	0,000052	
27	19	22,49	0,25	0	0,00039	0,00075	0,00039	0,000024	
28	20	11,87	0,13	0	0,00020	0,00040	0,00020	0,000007	
29	21	0	0	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,000000	
30									
31							Σ =	0,436688 cm	

6.4 DISCUSSÃO E VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

O Quadro 6.25 apresenta os resultados dos deslocamentos elásticos calculados com o método implementado e os retirados do programa de cálculo utilizado, assim como as diferenças relativas e percentuais, por forma a fazer a sua validação.

Quadro 6.25 - Comparação entre os deslocamentos elásticos do método e programa de cálculo

Exemplos	Ponto	Deformação elástica (cm)		Diferenças	
		Programa de cálculo	Método	Relativa (mm)	Percentual
Laje Simétrica	A	0,226	0,207	0,188	8%
	B	0,165	0,154	0,116	7%
	C	0,087	0,096	-0,086	10%
Laje não Simétrica	A	0,568	0,523	0,459	8%
	B	0,223	0,205	0,179	8%
	C	0,114	0,112	0,028	2%
Viga simplesmente apoiada	Flecha a meio vão	0,097	0,098	-0,005	1%

Como podemos observar, a maior diferença que se obteve entre os deslocamentos elásticos dados por este método e os dados pelo programa de cálculo é inferior a meio milímetro, sendo a maior diferença em termos percentuais igual a 10%. Assim, pode afirmar-se o método desenvolvido apresenta resultados coerentes.

Apresentam-se a seguir no Quadro 6.26 os valores dos deslocamentos elásticos, obtidos com a aplicação do método implementado, a curto e a longo prazo. Apresentam-se ainda nas três colunas da direita as relações entre (Des. Curto prazo/ Des. Elástico); (Des. Longo prazo/ Des. Elástico) e (Des. Longo prazo/ Des. Curto prazo). Na última linha são apresentados estes valores para uma viga simplesmente apoiada, para o meio-vão.

Quadro 6.26 - Resumo dos deslocamentos e suas relações

Exemplos	Ponto	Método - Deformações (cm)			$\frac{a_{t=0}}{a_c}$	$\frac{a_{t=\infty}}{a_c}$	$\frac{a_{t=\infty}}{a_{t=0}}$
		Elástica - a_c	A Curto Prazo - $a_{t=0}$	A longo Prazo - $a_{t=\infty}$			
Laje Simétrica	A	0,207	0,310	0,762	1,5	3,7	2,5
	B	0,154	0,278	0,624	1,8	4,1	2,2
	C	0,096	0,268	0,503	2,8	5,3	1,9
Laje não Simétrica	A	0,523	1,264	2,553	2,4	4,9	2,0
	B	0,205	0,271	0,684	1,3	3,3	2,5
	C	0,112	0,191	0,388	1,7	3,5	2,0
Viga simplesmente apoiada	Meio vão	0,098	0,277	0,437	2,8	4,5	1,6

Observando a coluna que mostra a relação entre os deslocamentos a longo prazo e os deslocamentos elásticos, verifica-se que esta varia entre 3.7 e 5.3 para os pontos da laje simétrica e entre 3.3 e 4.9 para os da laje não simétrica. Estes valores estão dentro dos valores análogos que se encontraram para a viga simplesmente apoiada, pelo que se pode afirmar que estão dentro do expectável para peças de betão armado submetidas a esforços de flexão.

Observa-se também que a relação entre o deslocamento obtido a curto prazo e o deslocamento elástico varia para os diferentes pontos da laje simétrica entre 1.5 e 2.8 e para os pontos da laje não simétrica entre 1.3 e 2.4 vezes. Também se observa que a variação entre os deslocamentos a curto prazo e os

deslocamentos a longo prazo se encontra entre 1.9 e 2.5, dependendo esta variação apenas da fluência do betão.

7

CASO DE ESTUDO

Para clarificar a utilização do método desenvolvido e a sua aplicabilidade a diferentes tipos de lajes fungiformes, aplica-se o mesmo numa situação de um projeto real de uma laje fungiforme com capiteis.

Trata-se de um edifício a executar em Angola, Luanda, na orla costeira, com 28 pisos, sem caves, dada a presença de água do mar à superfície na sua zona de implantação e a consequente dificuldade de execução de pisos enterrados.

Os primeiros dez pisos são destinados a estacionamento automóvel e os restantes a escritórios.

A estrutura prevista é constituída por lajes em betão armado, do tipo fungiformes maciças com capitéis, tendo a zona corrente das mesmas a espessura de 0.30 m e a zona de capitéis a espessura de 0.50 m. Estas lajes apoiam diretamente em pilares ou em paredes de betão armado.

De forma a assegurar o correto contraventamento da estrutura, está prevista a execução de um núcleo central totalmente constituído por paredes em betão armado, nas zonas destinadas a escadas e elevadores.

Dada a existência de grandes consolas na periferia do edifício, toma especial interesse neste caso o estudo da deformação das suas lajes, de forma a controlar o aparecimento de patologias na sua parede envolvente.

O piso em estudo é destinado a escritório, situado entre os pisos 12º a 28º. Esta laje apresenta capiteis em todas as ligações aos pilares com a espessura de 0.50 m conforme ilustrado na Figura 7.1, na qual se apresenta a planta estrutural deste piso.

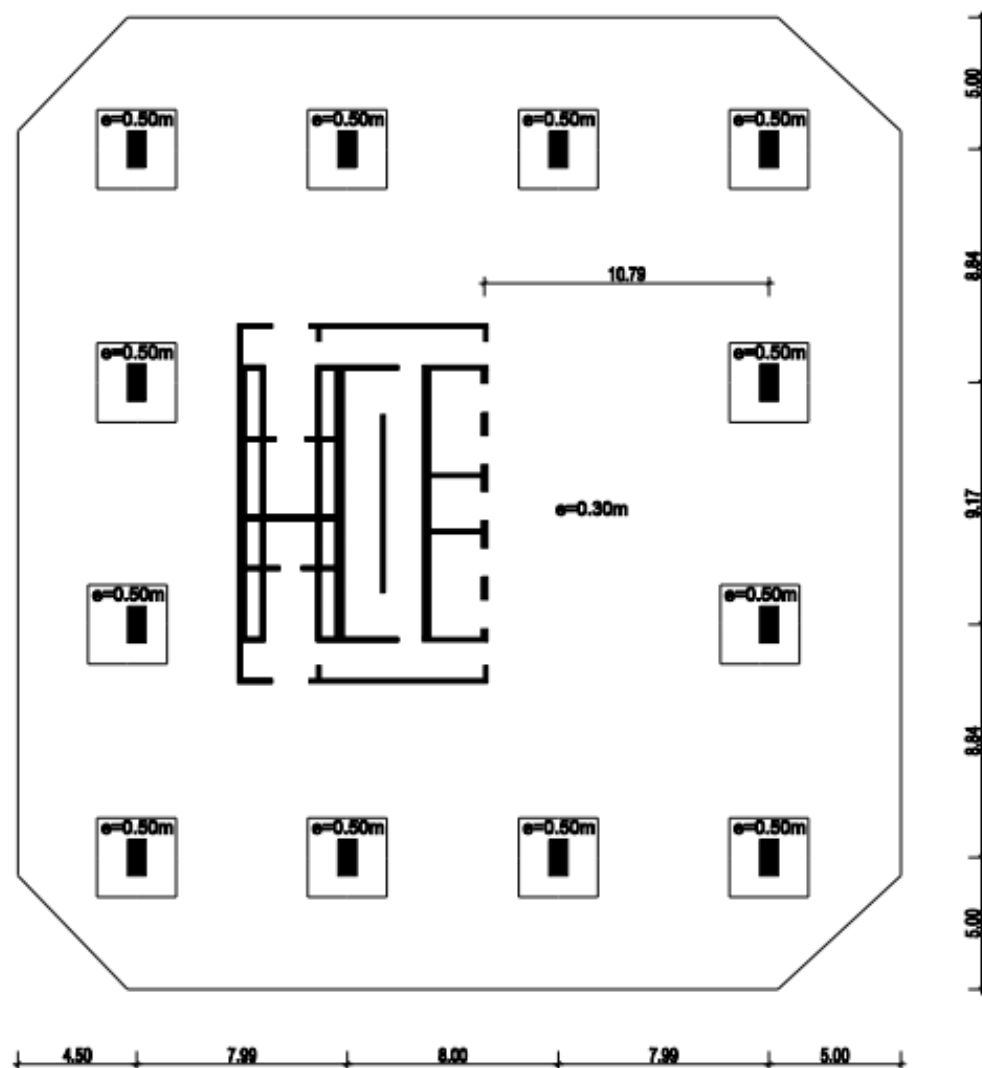


Figura 7.1 - Planta com as respectivas espessuras e cotas

São apresentados no Quadro 7.1 as cargas consideradas no piso em causa.

Quadro 7.1 - Ações consideradas no cálculo da laje

Acções	e = 0,3 m	e = 0,50 m
Peso próprio	7,2 kN/m ²	12 kN/m ²
Restantes Cargas permanentes	4 kN/m ²	4 kN/m ²
Sobrecarga	3 kN/m ²	3 kN/m ²

Utilizou-se $\Psi_2=0.3$.

Materiais: C30/37 ($\varphi(\infty,28) = 2.5$ e $\chi = 0.8$ – considera-se), A500

7.1 CÁLCULO DE DEFORMAÇÕES

Ir-se-ão calcular os deslocamentos elásticos, a curto e longo prazo, referentes a 4 pontos (A,B,C, e D) sobre a laje, conforme ilustrado na Figura 7.2, para a combinação quase-permanente de ações, usando o método desenvolvido neste trabalho.

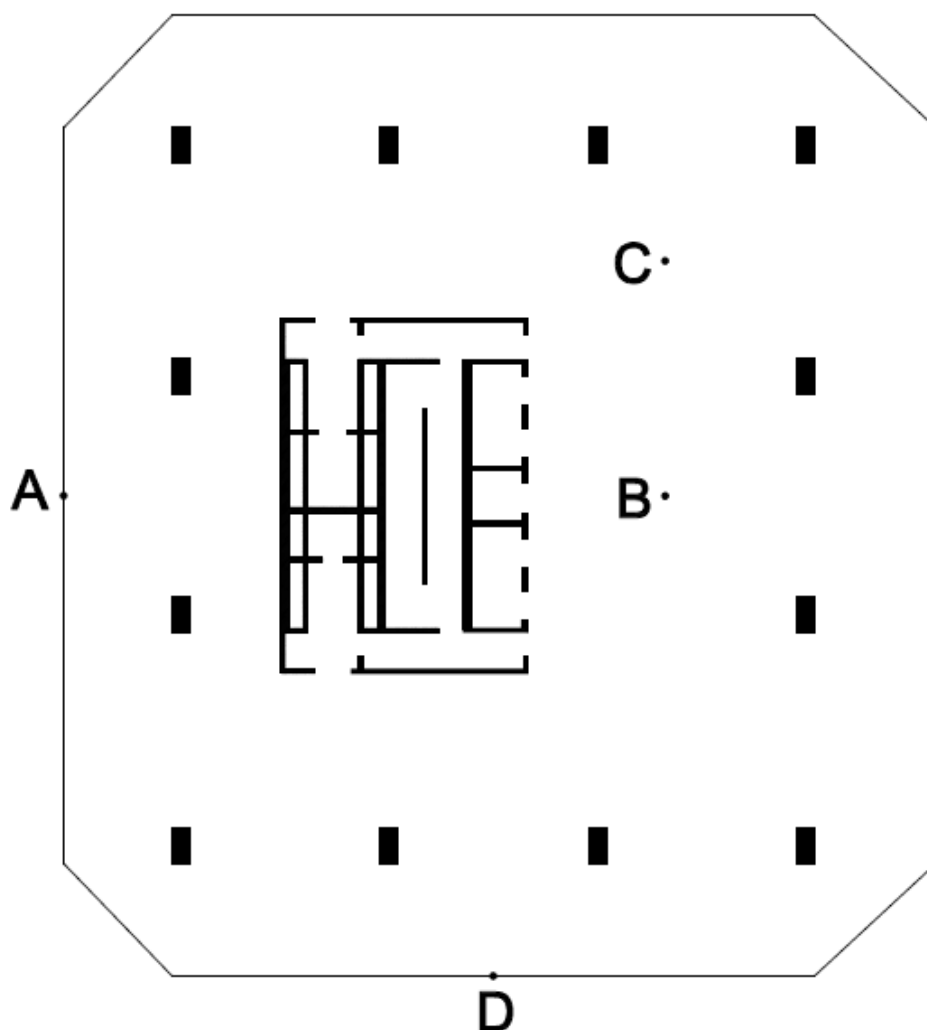


Figura 7.2 - Representação dos pontos a calcular os deslocamentos sobre a laje

I. Cálculo das flechas elásticas

- Dividiu-se a laje em elementos finitos com a dimensão de $0.25 \times 0.25 \text{ m}^2$, conforme se apresenta na figura a seguir:

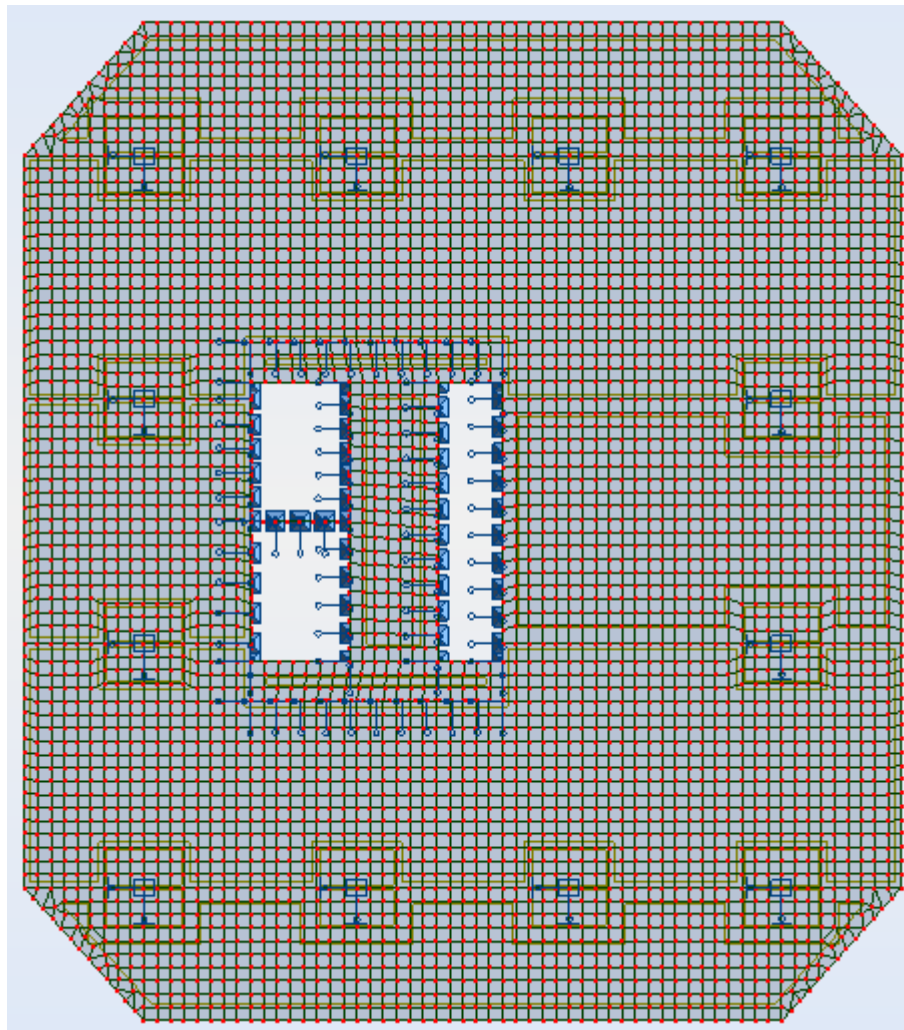


Figura 7.3 - Laje fungiforme com capiteis dividida em elementos finitos com $0.25 \times 0.25 \text{ m}^2$

- Seleção das zonas de seção diferente para posterior exportação dos dados necessários para os cálculos

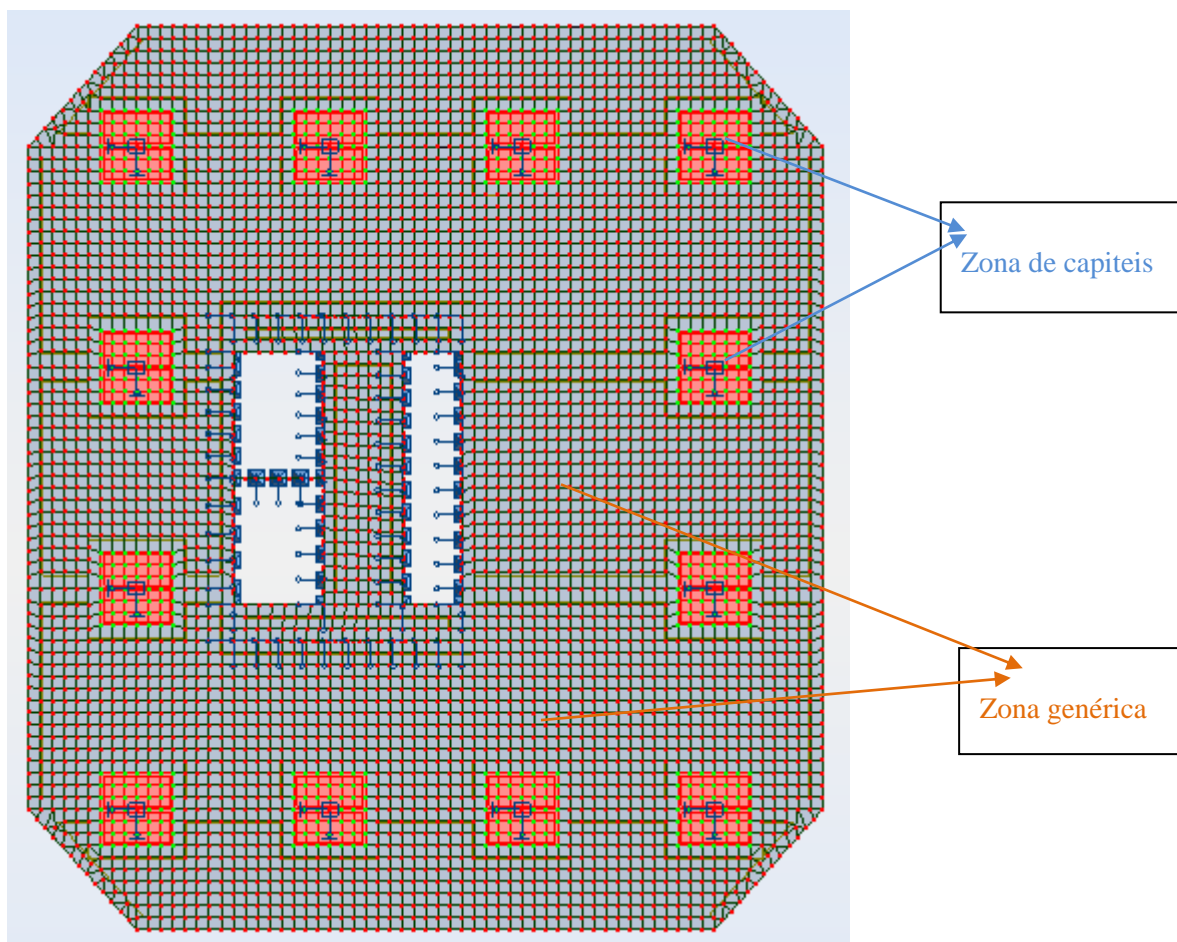


Figura 7.4 - Seleção das zonas de secção deferentes (Zona de capiteis)

- Determinação dos dados a introduzir na folha de cálculo:
 $C30/37 \Rightarrow E_{cm} = 33 \text{ Gpa}$
 Inércia (Considerando apenas a contribuição do betão – I_c):

Zona de capiteis:

$$I_{cx} = I_{cy} = 0,010416667 \text{ m}^4$$

Zona genérica:

$$I_{cx} = I_{cy} = 0,00225 \text{ m}^4$$

- Resultados dos deslocamentos elásticos:
 - Ponto A

Quadro 7.2 - Deslocamento elástico do ponto A

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N		
1	Ecm =	33	Gpa													
2																
3	Zona de capiteis			Zona genérica												
4	lc =	0,010416667	m^4	lc =	0,00225	m^4										
5																
6																
7																
8	XX										YY					
9	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A					Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A
10	10066	0,25	44,866	6,645	0,00013	0,000217					10066	0,25	56,983	-0,726	0,00017	-0,000030
11	10067	0,25	48,593	7,312	0,00014	0,000258					10067	0,25	88,443	-1,614	0,00026	-0,000104
12	10068	0,25	52,022	9,06	0,00015	0,000343					10068	0,25	107,794	-3,846	0,00031	-0,000302
13	10069	0,25	75,106	8,333	0,00022	0,000455					10069	0,25	59,502	-0,395	0,00017	-0,000017
441	10497	0,25	41,146	-0,02	0,00012	-0,000001					10497	0,25	81,357	0,012	0,00024	0,000001
442																
443																
444	2446	0,25	14,439	6,034	0,00019	0,000293					2446	0,25	16,938	2,079	0,00023	0,000119
445	2447	0,25	17,985	4,885	0,00024	0,000296					2447	0,25	19,346	1,116	0,00026	0,000073
446	2448	0,25	20,328	6,165	0,00027	0,000422					2448	0,25	20,199	1,453	0,00027	0,000099
447	2449	0,25	15,56	1,714	0,00021	0,000090					2449	0,25	24,513	0,038	0,00033	0,000003
448	2450	0,25	14,054	1,143	0,00019	0,000054					2450	0,25	20,091	-0,093	0,00027	-0,000006

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,371605 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,141763 \text{ cm}$$

$$\delta A = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,371605 + 0,141763 = 0,513369 \text{ cm}$$

○ Ponto B

Quadro 7.3 - Deslocamento elástico do ponto B

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Ecm =	33	Gpa											
2														
3	Zona de capiteis			Zona genérica										
4	lc =	0,010416667	m^4	lc =	0,00225	m^4								
5														
6														
7														
8	XX						YY							
9	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A		
10	10066	0,25	44,866	0,008	0,00013	0,000000	10066	0,25	56,983	0,037	0,00017	0,000002		
11	10067	0,25	48,593	0,003	0,00014	0,000000	10067	0,25	88,443	0,048	0,00026	0,000003		
12	10068	0,25	52,022	-0,003	0,00015	0,000000	10068	0,25	107,794	0,033	0,00031	0,000003		
13	10069	0,25	75,106	0,045	0,00022	0,000002	10069	0,25	59,502	0,053	0,00017	0,000002		
441	10497	0,25	41,146	-4,054	0,00012	-0,000121	10497	0,25	81,357	-0,756	0,00024	-0,000045		
442														
443														
444	2446	0,25	14,439	0,006	0,00019	0,000000	2446	0,25	16,938	0,007	0,00023	0,000000		
445	2447	0,25	17,985	0,006	0,00024	0,000000	2447	0,25	19,346	0,01	0,00026	0,000001		
446	2448	0,25	20,328	0,005	0,00027	0,000000	2448	0,25	20,199	0,008	0,00027	0,000001		
447	2449	0,25	15,56	0,014	0,00021	0,000001	2449	0,25	24,513	0,024	0,00033	0,000002		
448	2450	0,25	14,054	0,02	0,00019	0,000001	2450	0,25	20,091	0,023	0,00027	0,000002		

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,260971 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,071265 \text{ cm}$$

$$\delta B = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,260971 + 0,071265 = 0,332237 \text{ cm}$$

○ Ponto C

Quadro 7.4 - Deslocamento elástico do ponto C

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N		
1	Ecm =	33	Gpa													
2																
3	Zona de capiteis			Zona genérica												
4	Ic =	0,010416667	m^4	Ic =	0,00225	m^4										
5																
6																
7																
8	XX										YY					
9	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A					Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A
10	10066	0,25	44,866	0,092	0,00013	0,000003					10066	0,25	56,983	-0,136	0,00017	-0,000006
11	10067	0,25	48,593	0,04	0,00014	0,000001					10067	0,25	88,443	-0,161	0,00026	-0,000010
12	10068	0,25	52,022	0,017	0,00015	0,000001					10068	0,25	107,794	-0,273	0,00031	-0,000021
13	10069	0,25	75,106	0,368	0,00022	0,000020					10069	0,25	59,502	-0,092	0,00017	-0,000004
441	10497	0,25	41,146	-0,011	0,00012	0,000000					10497	0,25	81,357	0,145	0,00024	0,000009
442																
443																
444	2446	0,25	14,439	0,036	0,00019	0,000002					2446	0,25	16,938	-0,01	0,00023	-0,000001
445	2447	0,25	17,985	0,027	0,00024	0,000002					2447	0,25	19,346	-0,036	0,00026	-0,000002
446	2448	0,25	20,328	0,038	0,00027	0,000003					2448	0,25	20,199	-0,021	0,00027	-0,000001
447	2449	0,25	15,56	0,003	0,00021	0,000000					2449	0,25	24,513	-0,167	0,00033	-0,000014
448	2450	0,25	14,054	-0,02	0,00019	-0,000001					2450	0,25	20,091	-0,264	0,00027	-0,000018

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,154742 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,093126 \text{ cm}$$

$$\delta C = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,154742 + 0,093126 = 0,247868 \text{ cm}$$

○ Ponto D

Quadro 7.5 - Deslocamento elástico do ponto D

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Ecm =	33 Gpa												
2														
3	Zona de capiteis			Zona genérica										
4	Ic =	0,010416667	m^4	Ic =	0,00225	m^4								
5														
6														
7														
8	XX								YY					
9	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A			Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	1/r	1/r*M1*A
10	10066	0,25	44,866	-0,001	0,00013	0,000000			10066	0,25	56,983	-0,002	0,00017	0,000000
11	10067	0,25	48,593	-0,003	0,00014	0,000000			10067	0,25	88,443	-0,008	0,00026	-0,000001
12	10068	0,25	52,022	-0,004	0,00015	0,000000			10068	0,25	107,794	-0,018	0,00031	-0,000001
13	10069	0,25	75,106	-0,002	0,00022	0,000000			10069	0,25	59,502	-0,001	0,00017	0,000000
441	10497	0,25	41,146	13,585	0,00012	0,000407			10497	0,25	81,357	67,479	0,00024	0,003993
442														
443														
444	2446	0,25	14,439	0	0,00019	0,000000			2446	0,25	16,938	-0,003	0,00023	0,000000
445	2447	0,25	17,985	0	0,00024	0,000000			2447	0,25	19,346	-0,002	0,00026	0,000000
446	2448	0,25	20,328	0	0,00027	0,000000			2448	0,25	20,199	-0,003	0,00027	0,000000
447	2449	0,25	15,56	0	0,00021	0,000000			2449	0,25	24,513	-0,001	0,00033	0,000000
448	2450	0,25	14,054	0	0,00019	0,000000			2450	0,25	20,091	-0,001	0,00027	0,000000

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,069357 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,495171 \text{ cm}$$

$$\delta C = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,069357 + 0,495171 = 0,564528 \text{ cm}$$

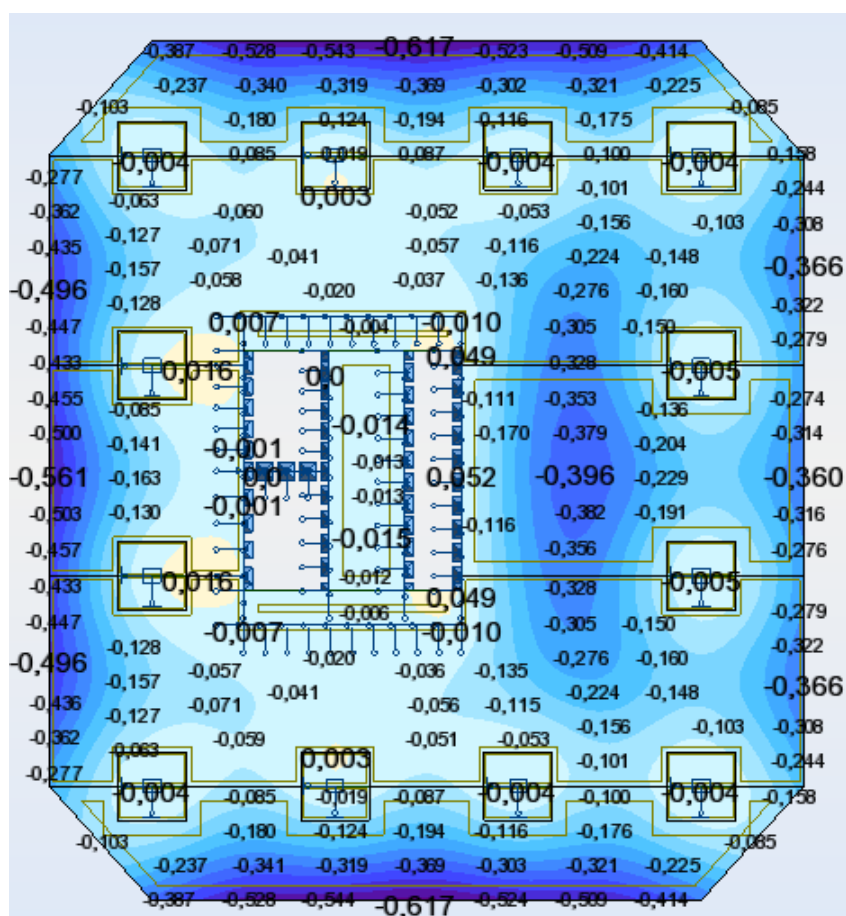


Figura 7.5 - Mapa dos deslocamentos elásticos sobre a laje para a ELS

II. Cálculo das flechas a curto prazo

- Para a combinação em Estado Limite Ultimo foram dimensionadas as armaduras da laje, obtendo assim as seguintes secções para os capiteis e para a zona genérica:

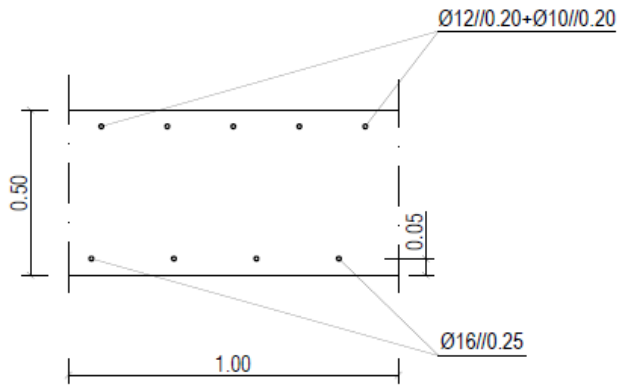


Figura 7.6 - Secção transversal da zona de capitel para direção X

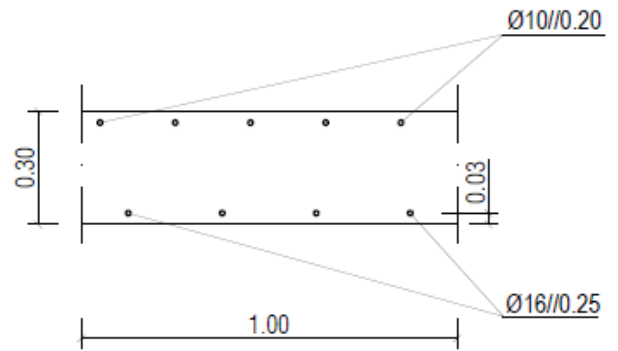


Figura 7.7 - Secção transversal da zona genérica para direção X

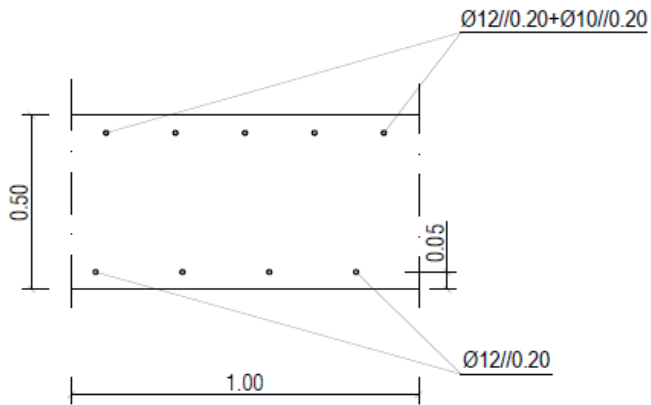


Figura 7.8 - Secção transversal da zona de capitel para direção Y

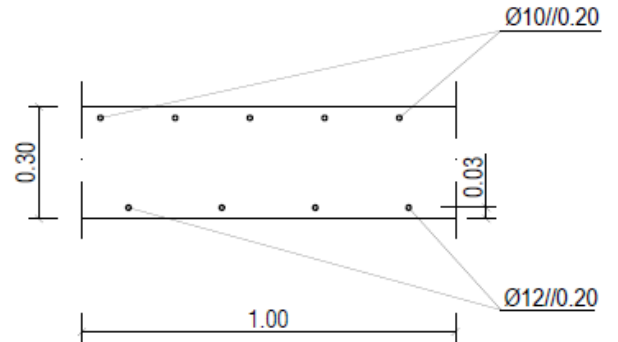


Figura 7.9 - Secção transversal da zona genérica para direção Y

- Cálculo M_{cr} :

Secção: $1 \times 0.30 \text{ m}^2$ C30/37

$$\text{Zona de capiteis: } M_{cr} = \frac{f_{ctm} \times b \times h^2}{6} = \frac{2900 \times 1 \times 0.30^2}{6} = 43.5 \text{ kn.m}$$

$$\text{Zona genérica: } M_{cr} = \frac{f_{ctm} \times b \times h^2}{6} = \frac{2900 \times 1 \times 0.5^2}{6} = 120.83 \text{ kn.m}$$

- Cálculo das Inércias:

$$E_{cm} = 33 \text{ Gpa}$$

$$\alpha = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{200}{33} = 6.06$$

Zona genérica

$$I_{1x} = 0,002337033 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (+) = 0,000277499 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (-) = 0,000145785 \text{ m}^4$$

$$I_{1y} (+) = 0,002319768 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (+) = 0,000202633 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (-) = 0,000145772 \text{ m}^4$$

Zona de capiteis

$$I_{1x} = 0,010773336 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (+) = 0,000813742 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (-) = 0,00095309 \text{ m}^4$$

$$I_{1y} (+) = 0,010724648 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (+) = 0,000589248 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (-) = 0,000952782 \text{ m}^4$$

- Resultados dos deslocamentos a curto prazo:
 - Ponto A

Quadro 7.6 - Deslocamento a curto prazo do ponto A

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	120,83	kN.m		Ecm =	33	Gpa													
2	Mcr =	43,5	kN.m																	
3	Dados XX										Dados YY									
4	Zona de capiteis					Zona genérica					Zona de capiteis					Zona genérica				
5	I1 =	0,010773336	m ⁴		I1 =	0,002337033	m ⁴				I1 =	0,010724648	m ⁴		I1 =	0,0023198	m ⁴			
6																				
7	I2(+) =	0,000813742	m ⁴		I2(+) =	0,000277499	m ⁴				I2(+) =	0,000589248	m ⁴		I2(+) =	0,0002026	m ⁴			
8																				
9	I2(-) =	0,00095309	m ⁴		I2(-) =	0,000145785	m ⁴				I2(-) =	0,000952782	m ⁴		I2(-) =	0,0001458	m ⁴			
10																				
11	XX										YY									
12	Elemento	A(m2)	M(KNm/m)	M1(KNm/m)	ζ	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A		Elemento	A(m2)	M(KNm/m)	M1(KNm/m)	ζ	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A	
13	10066	0,25	44,866	8,129	0	0,00013	0,00143	0,00013	0,000256		10066	0,25	56,983	-0,653	0	0,00016	0,00181	0,00016	-0,000026	
441	10494	0,25	87,864	-0,01	0	0,00025	0,00279	0,00025	-0,000001		10494	0,25	61,169	0,004	0	0,00017	0,00195	0,00017	0,000000	
442	10495	0,25	86,209	-0,024	0	0,00024	0,00274	0,00024	-0,000001		10495	0,25	65,061	0,006	0	0,00018	0,00207	0,00018	0,000000	
443	10496	0,25	65,832	-0,025	0	0,00019	0,00209	0,00019	-0,000001		10496	0,25	68,89	0,007	0	0,00019	0,00219	0,00019	0,000000	
444	10497	0,25	41,146	-0,015	0	0,00012	0,00131	0,00012	0,000000		10497	0,25	81,357	0,013	0	0,00023	0,00259	0,00023	0,000001	
445																				
446	2446	0,25	14,439	7,248	0	0,00019	0,00300	0,00019	0,000339		2446	0,25	16,938	2,762	0	0,00022	0,00352	0,00022	0,000153	
447	2447	0,25	17,985	5,929	0	0,00023	0,00374	0,00023	0,000346		2447	0,25	19,346	1,526	0	0,00025	0,00402	0,00025	0,000096	
448	2448	0,25	20,328	7,462	0	0,00026	0,00423	0,00026	0,000492		2448	0,25	20,199	2,024	0	0,00026	0,00420	0,00026	0,000134	
449	2449	0,25	15,56	2,097	0	0,00020	0,00323	0,00020	0,000106		2449	0,25	24,513	0,153	0	0,00032	0,00510	0,00032	0,000012	
450	2450	0,25	14,054	1,419	0	0,00018	0,00292	0,00018	0,000065		2450	0,25	20,091	-0,002	0	0,00026	0,00418	0,00026	0,000000	

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,867858 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,214876 \text{ cm}$$

$$\delta A = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,867858 + 0,214876 = 1,082734 \text{ cm}$$

○ Ponto B

Quadro 7.7 - Deslocamento a curto prazo do ponto B

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
2	Mcr =	120,833333	kN.m		Ecm =	33	Gpa													
3	Mcr =	43,5	kN.m																	
4	Dados XX										Dados YY									
5	Zona de capiteis					Zona genérica					Zona de capiteis					Zona genérica				
6	I1 =	0,010773336	m^4		I1 =	0,002337033	m^4					I1 =	0,010724648	m^4		I1 =	0,0023198	m^4		
7	I2(+) =	0,000813742	m^4		I2(+) =	0,000277499	m^4					I2(+) =	0,000589248	m^4		I2(+) =	0,0002026	m^4		
8																				
9	I2(-) =	0,00095309	m^4		I2(-) =	0,000145785	m^4					I2(-) =	0,000952782	m^4		I2(-) =	0,0001458	m^4		
10																				
11	XX										YY									
12	Elemento	A (m2)	M [KNm/m]	M1 [KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/r*M1*A			Elemento	A (m2)	M [KNm/m]	M1 [KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/r*M1*A
13	10066	0,25	44,866	0,01	0	0,00013	0,00143	0,00013	0,000000			10066	0,25	56,983	0,042	0	0,00016	0,00181	0,00016	0,000002
441	10494	0,25	87,864	-5,092	0	0,00025	0,00279	0,00025	-0,000315			10494	0,25	61,169	-0,083	0	0,00017	0,00195	0,00017	-0,000004
442	10495	0,25	86,209	-2,646	0	0,00024	0,00274	0,00024	-0,000160			10495	0,25	65,061	0,087	0	0,00018	0,00207	0,00018	0,000004
443	10496	0,25	65,832	-2,932	0	0,00019	0,00209	0,00019	-0,000136			10496	0,25	68,89	0,015	0	0,00019	0,00219	0,00019	0,000001
444	10497	0,25	41,146	-3,645	0	0,00012	0,00131	0,00012	-0,000105			10497	0,25	81,357	-0,676	0	0,00023	0,00259	0,00023	-0,000039
445																				
446	2446	0,25	14,439	0,007	0	0,00019	0,00300	0,00019	0,000000			2446	0,25	16,938	0,008	0	0,00022	0,00352	0,00022	0,000000
447	2447	0,25	17,985	0,007	0	0,00023	0,00374	0,00023	0,000000			2447	0,25	19,346	0,011	0	0,00025	0,00402	0,00025	0,000001
448	2448	0,25	20,328	0,006	0	0,00026	0,00423	0,00026	0,000000			2448	0,25	20,199	0,009	0	0,00026	0,00420	0,00026	0,000001
449	2449	0,25	15,56	0,016	0	0,00020	0,00323	0,00020	0,000001			2449	0,25	24,513	0,026	0	0,00032	0,00510	0,00032	0,000002
450	2450	0,25	14,054	0,023	0	0,00018	0,00292	0,00018	0,000001			2450	0,25	20,091	0,025	0	0,00026	0,00418	0,00026	0,000002

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,412788 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,131592 \text{ cm}$$

$$\delta B = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,412788 + 0,131592 = 0,544380 \text{ cm}$$

○ Ponto C

Quadro 7.8 - Deslocamento a curto prazo do ponto C

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	120,83 kN.m			Ecm =	33 GPa														
2	Mcr =	43,5 kN.m																		
3	Dados XX										Dados YY									
	Zona de capiteis					Zona genérica					Zona de capiteis					Zona genérica				
5	I1 =	0,010773336	m^4		I1 =	0,002337033	m^4					I1 =	0,010724648	m^4		I1 =	0,0023198	m^4		
7	I2(+) =	0,000813742	m^4		I2(+) =	0,000277499	m^4					I2(+) =	0,000589248	m^4		I2(+) =	0,0002026	m^4		
9	I2(-) =	0,00095309	m^4		I2(-) =	0,000145785	m^4					I2(-) =	0,000952782	m^4		I2(-) =	0,0001458	m^4		
11	XX										YY									
12	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/r*M1*A			Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/r*M1*A
13	10066	0,25	44,866	0,092	0	0,00013	0,00143	0,00013	0,000003			10066	0,25	56,983	-0,136	0	0,00016	0,00181	0,00016	-0,000005
441	10494	0,25	87,864	-0,367	0	0,00025	0,00279	0,00025	-0,000023			10494	0,25	61,169	-0,031	0	0,00017	0,00195	0,00017	-0,000001
442	10495	0,25	86,209	-0,225	0	0,00024	0,00274	0,00024	-0,000014			10495	0,25	65,061	-0,01	0	0,00018	0,00207	0,00018	0,000000
443	10496	0,25	65,832	-0,048	0	0,00019	0,00209	0,00019	-0,000002			10496	0,25	68,89	0,053	0	0,00019	0,00219	0,00019	0,000003
444	10497	0,25	41,146	-0,011	0	0,00012	0,00131	0,00012	0,000000			10497	0,25	81,357	0,145	0	0,00023	0,00259	0,00023	0,000008
446	2446	0,25	14,439	0,036	0	0,00019	0,00300	0,00019	0,000002			2446	0,25	16,938	-0,01	0	0,00022	0,00352	0,00022	-0,000001
447	2447	0,25	17,985	0,027	0	0,00023	0,00374	0,00023	0,000002			2447	0,25	19,346	-0,036	0	0,00025	0,00402	0,00025	-0,000002
448	2448	0,25	20,328	0,038	0	0,00026	0,00423	0,00026	0,000003			2448	0,25	20,199	-0,021	0	0,00026	0,00420	0,00026	-0,000001
449	2449	0,25	15,56	0,003	0	0,00020	0,00323	0,00020	0,000000			2449	0,25	24,513	-0,167	0	0,00032	0,00510	0,00032	-0,000013
450	2450	0,25	14,054	-0,02	0	0,00018	0,00292	0,00018	-0,000001			2450	0,25	20,091	-0,264	0	0,00026	0,00418	0,00026	-0,000017

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,256954 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,090875 \text{ cm}$$

$$\delta C = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,256954 + 0,090875 = 0,347829 \text{ cm}$$

○ Ponto D

Quadro 7.9 - Deslocamento a curto prazo do ponto D

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T		
1	Mcr =	120,83	kN.m		Ecm =	33	Gpa															
2	Mcr =	43,5	kN.m																			
3	Dados XX											Dados YY										
4	Zona de cabeiteis					Zona genérica						Zona de cabeiteis					Zona genérica					
5	I1 =	0,010773336	m^4		I1 =	0,002337033	m^4					I1 =	0,010724648	m^4		I1 =	0,0023198	m^4				
6																						
7	I2(+) =	0,000813742	m^4		I2(+) =	0,000277499	m^4					I2(+) =	0,000589248	m^4		I2(+) =	0,0002026	m^4				
8																						
9	I2(-) =	0,00095309	m^4		I2(-) =	0,000145785	m^4					I2(-) =	0,000952782	m^4		I2(-) =	0,0001458	m^4				
10																						
11	XX											YY										
12	Elemento	Área (m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	Ç	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*Δ			Elemento	Área (m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	Ç	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*Δ		
13	10066	0,25	44,866	-0,001	0	0,00013	0,00143	0,00013	0,000000			10066	0,25	56,983	-0,002	0	0,00016	0,00181	0,00016	0,000000		
441	10494	0,25	87,864	10,292	0	0,00025	0,00279	0,00025	0,000636			10494	0,25	61,169	33,123	0	0,00017	0,00195	0,00017	0,001431		
442	10495	0,25	86,209	5,782	0	0,00024	0,00274	0,00024	0,000351			10495	0,25	65,061	39,63	0	0,00018	0,00207	0,00018	0,001821		
443	10496	0,25	65,832	3,892	0	0,00019	0,00209	0,00019	0,000180			10496	0,25	68,89	46,134	0	0,00019	0,00219	0,00019	0,002245		
444	10497	0,25	41,146	13,585	0	0,00012	0,00131	0,00012	0,000393			10497	0,25	81,357	67,479	0	0,00023	0,00259	0,00023	0,003878		
445																						
446	2446	0,25	14,439	0	0	0,00019	0,00300	0,00019	0,000000			2446	0,25	16,938	-0,003	0	0,00022	0,00352	0,00022	0,000000		
447	2447	0,25	17,985	0	0	0,00023	0,00374	0,00023	0,000000			2447	0,25	19,346	-0,002	0	0,00025	0,00402	0,00025	0,000000		
448	2448	0,25	20,328	0	0	0,00026	0,00423	0,00026	0,000000			2448	0,25	20,199	-0,003	0	0,00026	0,00420	0,00026	0,000000		
449	2449	0,25	15,56	0	0	0,00020	0,00323	0,00020	0,000000			2449	0,25	24,513	-0,001	0	0,00032	0,00510	0,00032	0,000000		
450	2450	0,25	14,054	0	0	0,00018	0,00292	0,00018	0,000000			2450	0,25	20,091	-0,001	0	0,00026	0,00418	0,00026	0,000000		

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,093130 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 1,523603 \text{ cm}$$

$$\delta C = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,093130 + 1,523603 = 1,616733 \text{ cm}$$

III. Cálculo das flechas a longo prazo

O cálculo será análogo ao apresentado anteriormente, alternando apenas na consideração da fluência, tendo sido adotado o valor de $\varphi = 2.5$ (coeficiente de fluência).

Os valores de M_{cr} foram já calculados no ponto II.

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{(1 + \varphi)} = \frac{33}{1 + 2.5} = 9.43 \text{ Gpa}$$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{200}{9.43} = 21.2$$

Cálculo das inércias:

Zona genérica

$$I_{1x} = 0,002595122 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (+) = 0,000804593 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (-) = 0,000450532 \text{ m}^4$$

$$I_{1y} (+) = 0,002528119 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (+) = 0,000604592 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (-) = 0,000447719 \text{ m}^4$$

Zona de capiteis

$$I_{1x} = 0,01183964 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (+) = 0,0024697 \text{ m}^4$$

$$I_{2x} (-) = 0,002849826 \text{ m}^4$$

$$I_{1y} (+) = 0,011642501 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (+) = 0,001824125 \text{ m}^4$$

$$I_{2y} (-) = 0,002832339 \text{ m}^4$$

- Resultados dos deslocamentos a longo prazo:
 - Ponto A

Quadro 7.10 - Deslocamento a longo prazo do ponto A

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	120,83	kN.m		Ecm =	9,43	Gpa													
2	Mcr =	43,5	kN.m																	
3	Dados XX										Dados YY									
4	Zona de capiteis					Zona genérica					Zona de capiteis					Zona genérica				
5	I1 =	0,01183964	m^4		I1 =	0,002595122	m^4					I1 =	0,011642501	m^4		I1 =	0,0025281	m^4		
6																				
7	I2(+) =	0,0024697	m^4		I2(+) =	0,000804593	m^4					I2(+) =	0,001824125	m^4		I2(+) =	0,0006046	m^4		
8																				
9	I2(-) =	0,002849826	m^4		I2(-) =	0,000450532	m^4					I2(-) =	0,002832339	m^4		I2(-) =	0,0004477	m^4		
10	XX										YY									
12	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A			Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A
13	10066	0,25	44,866	8,129	0	0,00040	0,00167	0,00040	0,000817			10066	0,25	56,983	-0,653	0	0,00052	0,00213	0,00052	-0,000085
441	10494	0,25	87,864	-0,01	0	0,00079	0,00327	0,00079	-0,000002			10494	0,25	61,169	0,004	0	0,00056	0,00229	0,00056	0,000001
442	10495	0,25	86,209	-0,024	0	0,00077	0,00321	0,00077	-0,000005			10495	0,25	65,061	0,006	0	0,00059	0,00244	0,00059	0,000001
443	10496	0,25	65,832	-0,025	0	0,00059	0,00245	0,00059	-0,000004			10496	0,25	68,89	0,007	0	0,00063	0,00258	0,00063	0,000001
444	10497	0,25	41,146	-0,015	0	0,00037	0,00153	0,00037	-0,000001			10497	0,25	81,357	0,013	0	0,00074	0,00305	0,00074	0,000002
446	2446	0,25	14,439	7,248	0	0,00059	0,00340	0,00059	0,001069			2446	0,25	16,938	2,762	0	0,00071	0,00401	0,00071	0,000491
447	2447	0,25	17,985	5,929	0	0,00073	0,00423	0,00073	0,001089			2447	0,25	19,346	1,526	0	0,00081	0,00458	0,00081	0,000310
448	2448	0,25	20,328	7,462	0	0,00083	0,00478	0,00083	0,001550			2448	0,25	20,199	2,024	0	0,00085	0,00478	0,00085	0,000429
449	2449	0,25	15,56	2,097	0	0,00064	0,00366	0,00064	0,000333			2449	0,25	24,513	0,153	0	0,00103	0,00581	0,00103	0,000039
450	2450	0,25	14,054	1,419	0	0,00057	0,00331	0,00057	0,000204			2450	0,25	20,091	-0,002	0	0,00084	0,00476	0,00084	0,000000

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 2,043160 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,600350 \text{ cm}$$

$$\delta A = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 2,043160 + 0,600350 = 2,643510 \text{ cm}$$

○ Ponto B

Quadro 7.11 - Deslocamento a longo prazo do ponto B

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	120,8333333	kN.m		Ecm =	9,43	Gpa													
2	Mcr =	43,5	kN.m																	
3	Dados XX										Dados YY									
4	Zona de capiteis					Zona genérica					Zona de capiteis					Zona genérica				
5	I1 =	0,01183964	m^4		I1 =	0,002595122	m^4					I1 =	0,011642501	m^4		I1 =	0,0025281	m^4		
6																				
7	I2(+) =	0,0024697	m^4		I2(+) =	0,000804593	m^4					I2(+) =	0,001824125	m^4		I2(+) =	0,0006046	m^4		
8																				
9	I2(-) =	0,002849826	m^4		I2(-) =	0,000450532	m^4					I2(-) =	0,002832339	m^4		I2(-) =	0,0004477	m^4		
10																				
11	XX										YY									
12	Elemento	A (m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/r*M1*A			Elemento	A (m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/r*M1*A
13	10066	0,25	44,866	0,01	0	0,00040	0,00167	0,00040	0,000001			10066	0,25	56,983	0,042	0	0,00052	0,00213	0,00052	0,000005
441	10494	0,25	87,864	-5,092	0	0,00079	0,00327	0,00079	-0,001002			10494	0,25	61,169	-0,083	0	0,00056	0,00229	0,00056	-0,000012
442	10495	0,25	86,209	-2,646	0	0,00077	0,00321	0,00077	-0,000511			10495	0,25	65,061	0,087	0	0,00059	0,00244	0,00059	0,000013
443	10496	0,25	65,832	-2,932	0	0,00059	0,00245	0,00059	-0,000432			10496	0,25	68,89	0,015	0	0,00063	0,00258	0,00063	0,000002
444	10497	0,25	41,146	-3,645	0	0,00037	0,00153	0,00037	-0,000336			10497	0,25	81,357	-0,676	0	0,00074	0,00305	0,00074	-0,000125
445																				
446	2446	0,25	14,439	0,007	0	0,00059	0,00340	0,00059	0,000001			2446	0,25	16,938	0,008	0	0,00071	0,00401	0,00071	0,000001
447	2447	0,25	17,985	0,007	0	0,00073	0,00423	0,00073	0,000001			2447	0,25	19,346	0,011	0	0,00081	0,00458	0,00081	0,000002
448	2448	0,25	20,328	0,006	0	0,00083	0,00478	0,00083	0,000001			2448	0,25	20,199	0,009	0	0,00085	0,00478	0,00085	0,000002
449	2449	0,25	15,56	0,016	0	0,00064	0,00366	0,00064	0,000003			2449	0,25	24,513	0,026	0	0,00103	0,00581	0,00103	0,000007
450	2450	0,25	14,054	0,023	0	0,00057	0,00331	0,00057	0,000003			2450	0,25	20,091	0,025	0	0,00084	0,00476	0,00084	0,000005

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 1,075014 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,318856 \text{ cm}$$

$$\delta B = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 1,075014 + 0,318856 = 1,393870 \text{ cm}$$

○ Ponto C

Quadro 7.12 - Deslocamento a longo prazo do ponto C

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Mcr =	120,83 kN.m			Ecm =	9,43 Gpa														
2	Mcr =	43,5 kN.m																		
3	Dados XX										Dados YY									
4	Zona de capiteis					Zona genérica					Zona de capiteis					Zona genérica				
5	I1 = 0,01183964 m ⁴					I1 = 0,002595122 m ⁴					I1 = 0,011642501 m ⁴					I1 = 0,0025281 m ⁴				
6	I2(+) = 0,0024697 m ⁴					I2(+) = 0,000804593 m ⁴					I2(+) = 0,001824125 m ⁴					I2(+) = 0,0006046 m ⁴				
7	I2(-) = 0,002849826 m ⁴					I2(-) = 0,000450532 m ⁴					I2(-) = 0,002832339 m ⁴					I2(-) = 0,0004477 m ⁴				
8																				
9																				
10																				
11	XX										YY									
12	Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A			Elemento	A(m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A
13	10066	0,25	44,866	0,092	0	0,00040	0,00167	0,00040	0,000009			10066	0,25	56,983	-0,136	0	0,00052	0,00213	0,00052	-0,000018
441	10494	0,25	87,864	-0,367	0	0,00079	0,00327	0,00079	-0,000072			10494	0,25	61,169	-0,031	0	0,00056	0,00229	0,00056	-0,000004
442	10495	0,25	86,209	-0,225	0	0,00077	0,00321	0,00077	-0,000043			10495	0,25	65,061	-0,01	0	0,00059	0,00244	0,00059	-0,000001
443	10496	0,25	65,832	-0,048	0	0,00059	0,00245	0,00059	-0,000007			10496	0,25	68,89	0,053	0	0,00063	0,00258	0,00063	0,000008
444	10497	0,25	41,146	-0,011	0	0,00037	0,00153	0,00037	-0,000001			10497	0,25	81,357	0,145	0	0,00074	0,00305	0,00074	0,000027
445																				
446	2446	0,25	14,439	0,036	0	0,00059	0,00340	0,00059	0,000005			2446	0,25	16,938	-0,01	0	0,00071	0,00401	0,00071	-0,000002
447	2447	0,25	17,985	0,027	0	0,00073	0,00423	0,00073	0,000005			2447	0,25	19,346	-0,036	0	0,00081	0,00458	0,00081	-0,000007
448	2448	0,25	20,328	0,038	0	0,00083	0,00478	0,00083	0,000008			2448	0,25	20,199	-0,021	0	0,00085	0,00478	0,00085	-0,000004
449	2449	0,25	15,56	0,003	0	0,00064	0,00366	0,00064	0,000000			2449	0,25	24,513	-0,167	0	0,00103	0,00581	0,00103	-0,000043
450	2450	0,25	14,054	-0,02	0	0,00057	0,00331	0,00057	-0,000003			2450	0,25	20,091	-0,264	0	0,00084	0,00476	0,00084	-0,000056

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,675018 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,349226 \text{ cm}$$

$$\delta B = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,675018 + 0,349226 = 1,024244 \text{ cm}$$

○ Ponto D

Quadro 7.13 - Deslocamento a longo prazo do ponto D

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
2	Mcr =	120,83 kN.m			Ecm =	9,43 Gpa														
3	Mcr =	43,5 kN.m																		
4	Dados XX										Dados YY									
5	Zona de capiteis					Zona genérica					Zona de capiteis					Zona genérica				
6	I1 = 0,01183964 m^4					I1 = 0,002595122 m^4					I1 = 0,011642501 m^4					I1 = 0,0025281 m^4				
7	I2(+) = 0,0024697 m^4					I2(+) = 0,000804593 m^4					I2(+) = 0,001824125 m^4					I2(+) = 0,0006046 m^4				
8	I2(-) = 0,002849826 m^4					I2(-) = 0,000450532 m^4					I2(-) = 0,002832339 m^4					I2(-) = 0,0004477 m^4				
11	XX										YY									
12	Elemento	Área (m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A	Elemento	Área (m2)	M[KNm/m]	M1[KNm/m]	C	1/r1	1/r2	1/rm	1/rm*M1*A		
13	10066	0,25	44,866	-0,001	0	0,00040	0,00167	0,00040	0,000000	10066	0,25	56,983	-0,002	0	0,00052	0,00213	0,00052	0,000000		
441	10494	0,25	87,864	10,292	0	0,00079	0,00327	0,00079	0,002025	10494	0,25	61,169	33,123	0	0,00056	0,00229	0,00056	0,004614		
442	10495	0,25	86,209	5,782	0	0,00077	0,00321	0,00077	0,001116	10495	0,25	65,061	39,63	0	0,00059	0,00244	0,00059	0,005871		
443	10496	0,25	65,832	3,892	0	0,00059	0,00245	0,00059	0,000574	10496	0,25	68,89	46,134	0	0,00063	0,00258	0,00063	0,007237		
444	10497	0,25	41,146	13,585	0	0,00037	0,00153	0,00037	0,001252	10497	0,25	81,357	67,479	0	0,00074	0,00305	0,00074	0,012501		
445																				
446	2446	0,25	14,439	0	0	0,00059	0,00340	0,00059	0,000000	2446	0,25	16,938	-0,003	0	0,00071	0,00401	0,00071	-0,000001		
447	2447	0,25	17,985	0	0	0,00073	0,00423	0,00073	0,000000	2447	0,25	19,346	-0,002	0	0,00081	0,00458	0,00081	0,000000		
448	2448	0,25	20,328	0	0	0,00083	0,00478	0,00083	0,000000	2448	0,25	20,199	-0,003	0	0,00085	0,00478	0,00085	-0,000001		
449	2449	0,25	15,56	0	0	0,00064	0,00366	0,00064	0,000000	2449	0,25	24,513	-0,001	0	0,00103	0,00581	0,00103	0,000000		
450	2450	0,25	14,054	0	0	0,00057	0,00331	0,00057	0,000000	2450	0,25	20,091	-0,001	0	0,00084	0,00476	0,00084	0,000000		

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x = 0,260293 \text{ cm}$$

$$\sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 3,290817 \text{ cm}$$

$$\delta B = \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) x + \sum \left(\frac{1}{r} \times M1 \times \Delta^2 \right) y = 0,260293 + 3,290817 = 3,551110 \text{ cm}$$

7.2 RESULTADOS

Apresentam-se no Quadro 7.14 os resultados dos deslocamentos elásticos calculados com o método desenvolvido e os retirados do programa de cálculo utilizado, assim como as diferenças relativas, por forma a fazer a sua validação neste caso de estudo.

Quadro 7.14 - Validação dos resultados dos deslocamentos elásticos obtidos pelo método desenvolvido

Caso de Estudo	Ponto	Deformação elástica (cm)		Diferenças	
		Programa de cálculo	Método	Relativa (mm)	Percentual
Baía de Luanda	A	0,559	0,513	0,456	8%
	B	0,396	0,332	0,638	16%
	C	0,252	0,248	0,041	2%
	D	0,616	0,565	0,515	8%

Como se pode observar, a maior diferença que se obteve em termos relativos é de 0.638 mm, sendo a maior diferença em termos percentuais igual a 16%. Sendo assim, pode-se afirmar que, o método desenvolvido apresenta resultados coerentes.

O Quadro 7.15 a apresenta os valores dos deslocamentos elásticos, a curto e longo prazo, de acordo com o método desenvolvido. Apresentam-se ainda nas três colunas da direita as relações entre (Des. Curto prazo/Des. Elástico); (Des. Longo prazo/Des. Elástico) e por último (Des. Longo prazo/Des. Curto prazo).

Quadro 7.15 - Resultados dos deslocamentos obtidos pelo método desenvolvido

Caso de Estudo	Ponto	Método - Deformações (cm)			$\frac{a_{t=0}}{a_c}$	$\frac{a_{t=\infty}}{a_c}$	$\frac{a_{t=\infty}}{a_{t=0}}$
		Elástica - a_c	A Curto Prazo - $a_{t=0}$	A longo Prazo - $a_{t=\infty}$			
Baía de Luanda	A	0,513	1,083	2,644	2,1	5,1	2,4
	B	0,332	0,544	1,394	1,6	4,2	2,6
	C	0,248	0,348	1,024	1,4	4,1	2,9
	D	0,565	1,617	3,551	2,9	6,3	2,2

No que diz respeito à coluna que apresenta a relação entre os deslocamentos (Des. Curto prazo/Des. Elástico), verifica-se que esta relação varia entre 1.4 e 2.9, para os pontos considerados sobre a laje em estudo.

Observa-se também que a relação entre (Des. Longo prazo/Des. Elástico) varia para os diferentes pontos sobre a laje em estudo entre 4.1 e 6.3. Estes valores estão dentro dos valores análogos que se encontraram para a viga simplesmente apoiada no subcapítulo 6.3 (para os pontos B e C), e também na viga em consola calculada no subcapítulo 5.3 (para os pontos A e D). Também se observa que a variação entre (Des. Longo prazo/Des. Curto prazo) se encontra entre 2.2 e 2.9, sendo esta variação originada quase na totalidade pela fluência do betão.

Como era de esperar, há um maior acréscimo de deformação por fendilhação nos pontos A e D, por serem pontos situados na extremidade de uma consola.

8

CONCLUSÃO E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

8.1 CONCLUSÕES

A presente dissertação teve como principal objetivo desenvolver e apresentar uma ferramenta de cálculo de deformação a longo prazo (entrando com os efeitos da fendilhação e da fluência), para lajes fungiformes maciças de espessura constante.

Nestas lajes, tratando-se de elementos de betão armado numa situação de flexão, é expectável que em fase de serviço, nas zonas em que os esforços instalados sejam superiores aos esforços de fendilhação, ocorra formação de fendas; esta fendilhação vai provocar, nas zonas em que ocorrer, uma diminuição significativa da rigidez do elemento, com o consequente aumento das deformações; por outro lado, com o decorrer do tempo, a ação da fluência vai diminuir o módulo de elasticidade do betão, o que também vai contribuir para incrementar os valores das deformações.

Assim, procurou-se perceber como estes efeitos irão afetar os elementos de betão armado bidirecionais, tipo laje, e de que maneira poderiam ser considerados no cálculo das suas deformações.

Com base nos conceitos adquiridos com o exemplo da aplicação do método a uma viga, conseguiu-se uma metodologia de cálculo de deformações em lajes para uma fase elástica, para uma fase a curto prazo (considerando a contribuição da armadura bem como os efeitos da fendilhação numa fase inicial) e para uma fase a longo prazo (acrescentando o efeito da fluência). Este método foi aplicado em lajes fungiformes maciças de espessura constante, tendo sido validado com a sua utilização num painel 6.0*6.0 m2 simplesmente apoiado. Em fase elástica, obtiveram-se desvios de cerca de 3% em relação ao resultado dado diretamente pelo programa de cálculo.

De seguida, e ainda numa fase de validação, para o mesmo painel, foram calculados os deslocamentos a longo prazo utilizando o método aqui desenvolvido e um método simplificado (Método Bilinear), obtendo uma diferença de 1.6 mm entre os deslocamentos calculados, a que corresponde um desvio de 4.25%. Chama-se a atenção de que o resultado obtido pelo método simplificado não é tido em conta como uma referência exata do valor expectável, mas sim como uma ordem de grandeza do mesmo. Por este facto, pode concluir-se que este método conduz a valores realistas, em sintonia com os obtidos por metodologias consideradas válidas.

Posteriormente, fez-se então uma análise de deformações em duas lajes fungiformes de espessura constante, uma simétrica com 15.0*15.0 m2 e a outra assimétrica, com 10.0*17.0 m2. Calcularam-se os deslocamentos elásticos, a curto e a longo prazo, em 3 pontos notáveis da laje. Por último, fez-se a mesma análise, utilizando o método para calcular a flecha máxima numa viga simplesmente apoiada,

de forma a obter um valor da ordem de grandeza da relação entre deslocamentos elásticos e deslocamentos a longo prazo em peças de betão armado.

Da análise feita, verificou-se que a máxima diferença relativa entre os deslocamentos elásticos obtidos pelo método desenvolvido em relação aos valores dados pelo programa de cálculo utilizado não chega a 0.5 mm, com um desvio máximo em termos percentuais de 10%. No que se refere aos deslocamentos a longo prazo, observou-se, na viga, um acréscimo em relação ao deslocamento elástico de 4.5; na laje simétrica, estes valores variaram entre 3.7 a 5.3, dependendo dos pontos considerados; na laje não simétrica a variação atingiu valores entre 3.3 a 4.9. Estes valores estão dentro da ordem de grandeza dos valores habitualmente referidos na literatura da especialidade.

Achou-se também interessante, com base neste método, apresentar os valores expectáveis para o acréscimo do deslocamento em relação ao deslocamento elástico, para situações a curto prazo (com efeito da fendilhação). Obtiveram-se para os diferentes pontos sobre a laje simétrica um acréscimo entre 1.5 e 2.8 e para a laje não simétrica um acréscimo entre 1.3 e 2.4 (da mesma ordem de grandeza).

Por fim, apresentaram-se ainda os valores obtidos para a relação (deslocamento a longo prazo / deslocamento a curto prazo). Obtiveram-se para os diferentes pontos sobre a laje simétrica um acréscimo entre 1.9 e 2.5 e para a laje não simétrica um acréscimo entre 2.0 e 2.5 (também da mesma ordem de grandeza). Estes valores traduzem o efeito da fluência, na situação quase-permanente, na evolução da deformação de uma laje com zonas fendilhadas.

Conclui-se assim que o acréscimo dos deslocamentos devido à fendilhação é variável, dependendo da área da laje, em cada direção, em que o momento atuante é superior ao M_{cr} , bem como da posição do ponto onde se quer calcular o deslocamento. O acréscimo de deslocamento devido à fluência, pelo que se pode observar na última coluna do Quadro 6.26, mantem-se aproximadamente constante.

Numa fase posterior, achou-se ainda interessante adaptar o método a um caso de estudo real de uma laje fungiforme com capiteis. Fez-se então o cálculo dos deslocamentos em quatro pontos notáveis da laje.

Dos cálculos efetuados, verificou-se então que a máxima diferença relativa entre os deslocamentos elásticos obtidos pelo método desenvolvido em relação aos valores obtidos pelo programa de cálculo utilizado é de 0.638 mm, com um desvio em termos percentuais de 16%. Em relação aos deslocamentos a longo prazo, observou-se uma variação do acréscimo em relação ao deslocamento elástico para os vários pontos sobre a laje entre 4.1 e 6.3.

No que se refere aos valores obtidos para a relação (Des. Curto prazo/Des. Elástico) estes valores variam entre 1.4 e 2.9. E por fim a relação (Des. Longo prazo/Des. Curto prazo), varia, para os diferentes pontos, entre 2.2 e 2.9.

De acordo com os resultados obtidos referentes a este caso real, podemos reforçar a conclusão já tirada relativa aos dois exemplos apresentados. É de notar que, como era de esperar, se observa-se um maior acréscimo da influência da fendilhação nos resultados respeitantes aos pontos A e D (pontos situados nas extremidades das zonas em consola). Estes valores encontram-se aproximadamente dentro da ordem de grandeza dos valores observadas na viga em consola.

Chama-se a atenção de que: “As deformações reais poderão diferir dos valores estimados, especialmente se os valores dos momentos atuantes são próximos dos momentos de fendilhação. As diferenças dependerão da dispersão das propriedades dos materiais, da história do carregamento, do grau de encastramento nos apoios, das condições do terreno, etc” (NP EN 1992-1-1 2010).

É de notar que este método inicialmente desenvolvido tendo como objetivo estudar a deformação de lajes fungiformes maciças, pode facilmente ser adaptado a lajes aligeiradas nervuradas, como também a lajes maciças com capitéis (como se pode observar).

8.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Sendo esta uma primeira abordagem deste método, verifica-se que existem ainda alguns tópicos e casos a desenvolver, sugerindo-se então nos parágrafos seguintes algumas questões a abordar em possíveis desenvolvimentos futuro.

A aplicação do método a outros tipos de lajes fungiformes, nomeadamente laje fungiformes aligeiradas nervuradas, lajes maciças com capitéis e ainda lajes nervuradas com capitéis.

Seria também interessante fazer uma verificação do acréscimo do deslocamento a longo prazo em relação ao deslocamento imediato, ocorrido após a descofragem, ainda sem as restantes cargas permanentes nem as sobrecargas aplicadas.

Poder-se-ia também estudar o que ocorre com o deslocamento a longo prazo, estabelecendo diferentes idades de carregamento para diferentes carregamentos – descofragem, aplicação de revestimentos, execução de divisórias e aplicação de sobrecargas.

Sugere-se também validar os resultados com programas de cálculos automático baseados em comportamento não linear dos materiais, que simulam os efeitos diferidos do betão e do aço e que têm em conta o comportamento do betão tracionado (Ex: Ansys, DIANA, ATENA, SAP200-V18, etc).

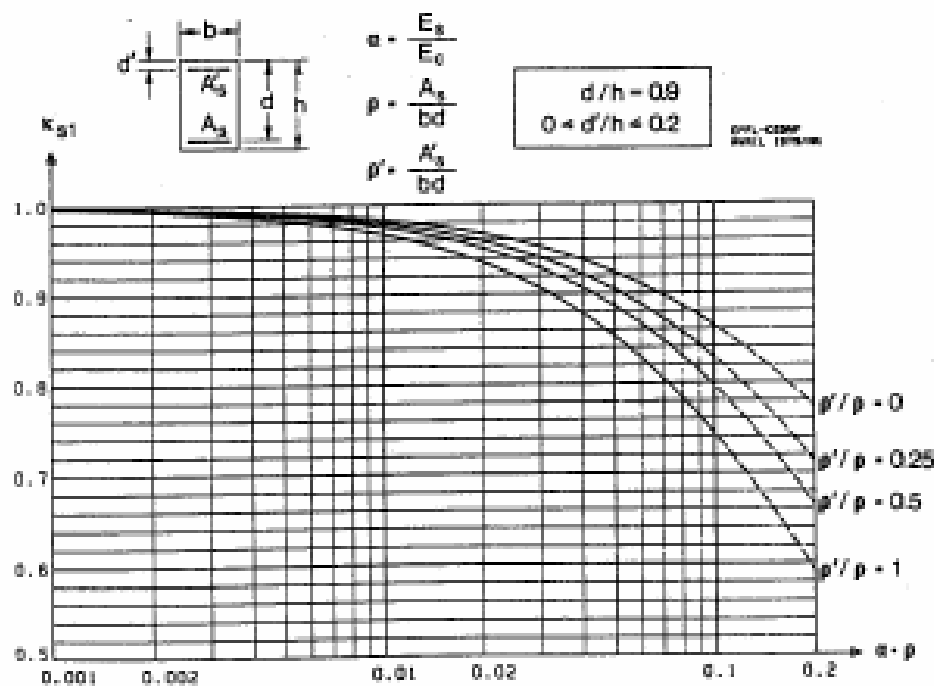
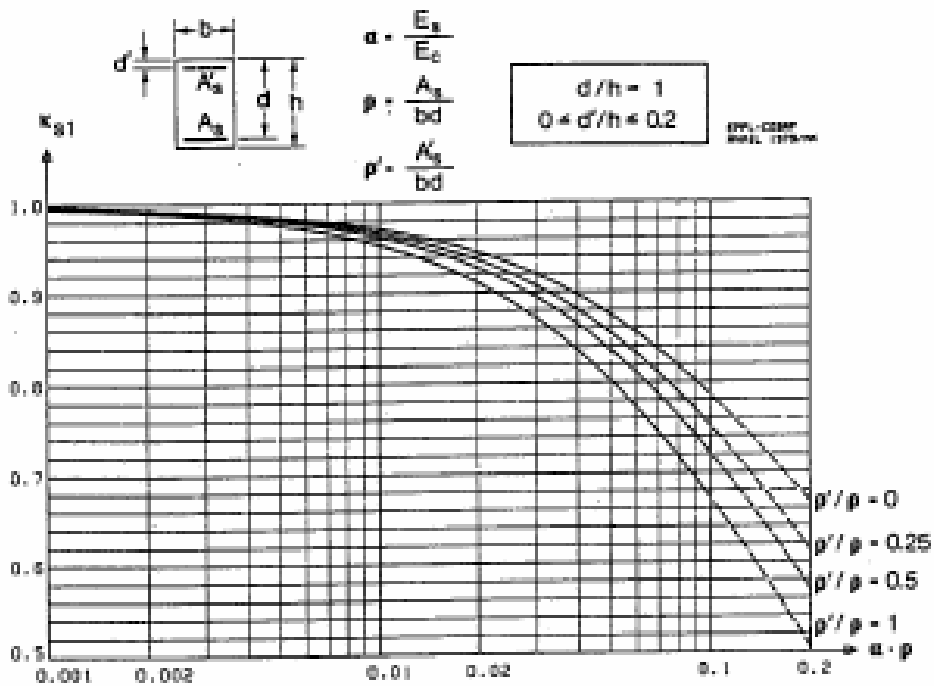
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barboza, Aline da Silva Ramos. 1992. «Contribuição à análise estrutural de sistemas lajes-vigas de concreto armado mediante analogia de grelha». São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- Brandão, Nuno Bandarrinha. 2013. «Análise Competitiva de Soluções em Laje Fungiforme e Vigada Engenharia Civil». Instituto Superior Técnico.
- Camara, José Noronha da Camara. 2014. «Estruturas de Betão I».
- Cardoso, Nuno. 2013. «Dimensionamento e comparação de custos de execução de lajes a grande altura com soluções tradicionais escoradas e em estrutura mista Aço Betão». Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. <http://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/71621>.
- Carvalho, Nelson Romano Ferreira. 2008. «Metodologias de Análise de Lajes Fungiformes - Aplicação no Projecto de Edifícios». Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Costa, António. 2013. «Estruturas de Betão II - 2013/2014».
- Costa, António, e Júlio Appleton. 2002. «Estruturas de Betão I: Parte 2 - Materiais». *Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico*.
- Duarte, Heraldo. 1998. «Aspectos da análise estrutural das lajes de edifícios de concreto armado». Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo.
- Favre, R, A W Beeby, H Falkner, M Koprna, e P Schiessl. 1985. *CEB Design Manual on Cracking and Deformation*. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse.
- Figueiras, J. A. 2003. «Verificação aos estados limites de utilização». Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- NP EN 1992-1-1. 2010. «Eurocódigo 2 projecto de estruturas de betão Parte 1-1 regras gerais e regras para edifícios NP EN 1992-1-1: 2010». Caparica, 259.
- Ramos, AP. 2006. «7-Lajes Fungiformes-Introdução-Estruturas de Betão Armado II». Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova Lisboa.
- Tavares, Rodolfo Micaelo. 2010. «State-of-Art sobre o Controlo da Fendilhação devido a Deformações Impostas». Instituto Superior Técnico.
- Tesoro, F Regalado. 1991. «Los forjados reticulares: manual práctico». *Barcelona: CYPE Ingenieros*.

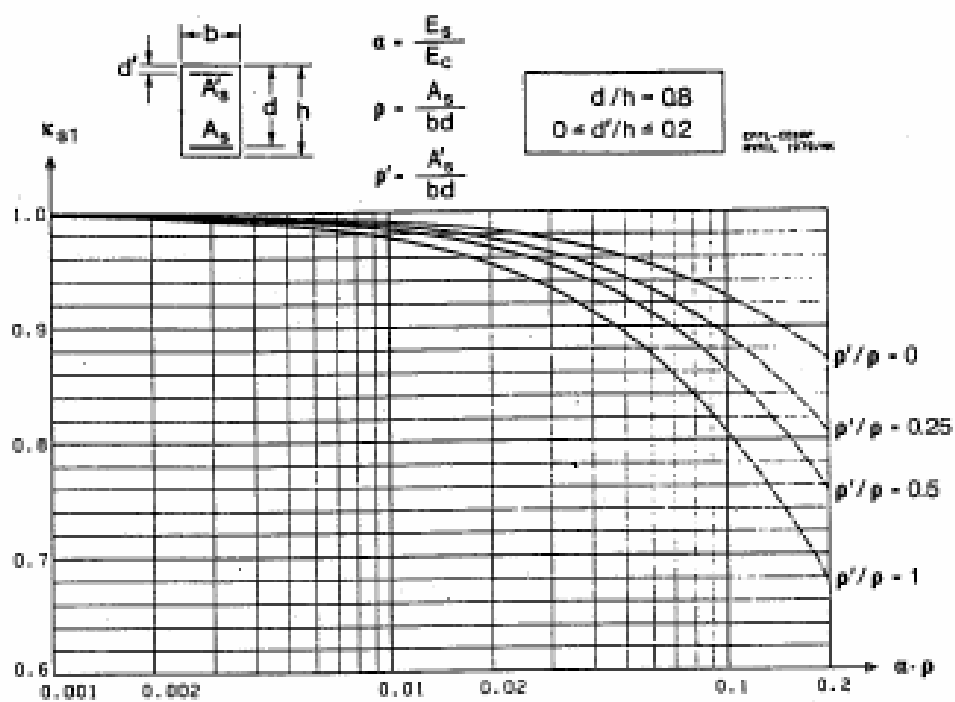
ANEXOS

ANEXO A – COEFICIENTES DE CORREÇÃO PARA A APLICAÇÃO DO MÉTODO BILINEAR (FONTE: (FAVRE ET AL. 1985))

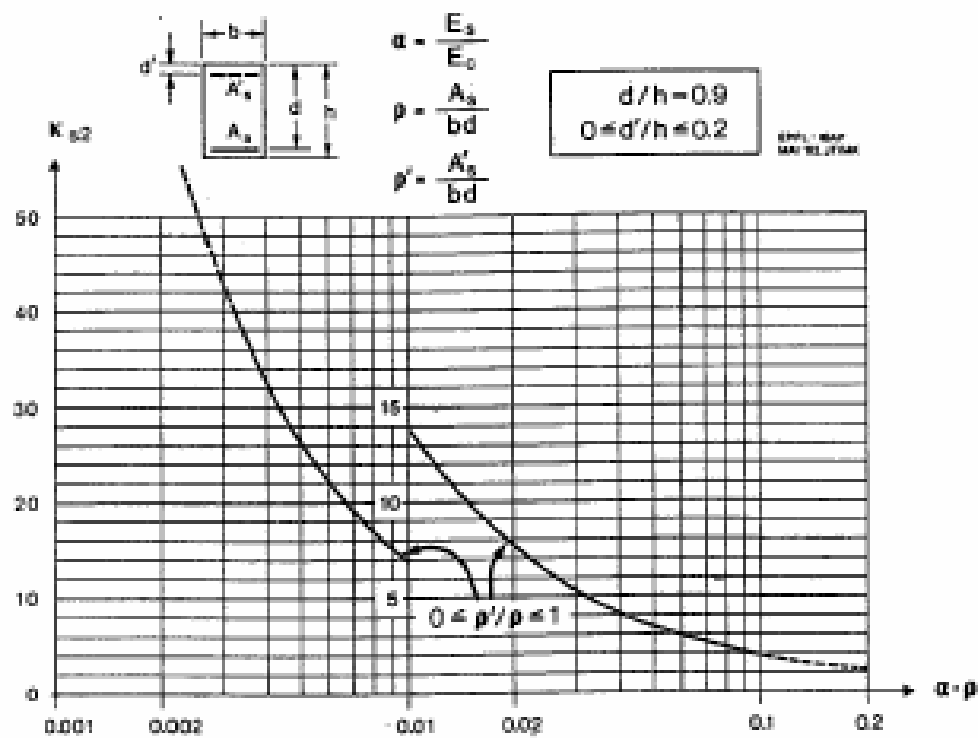
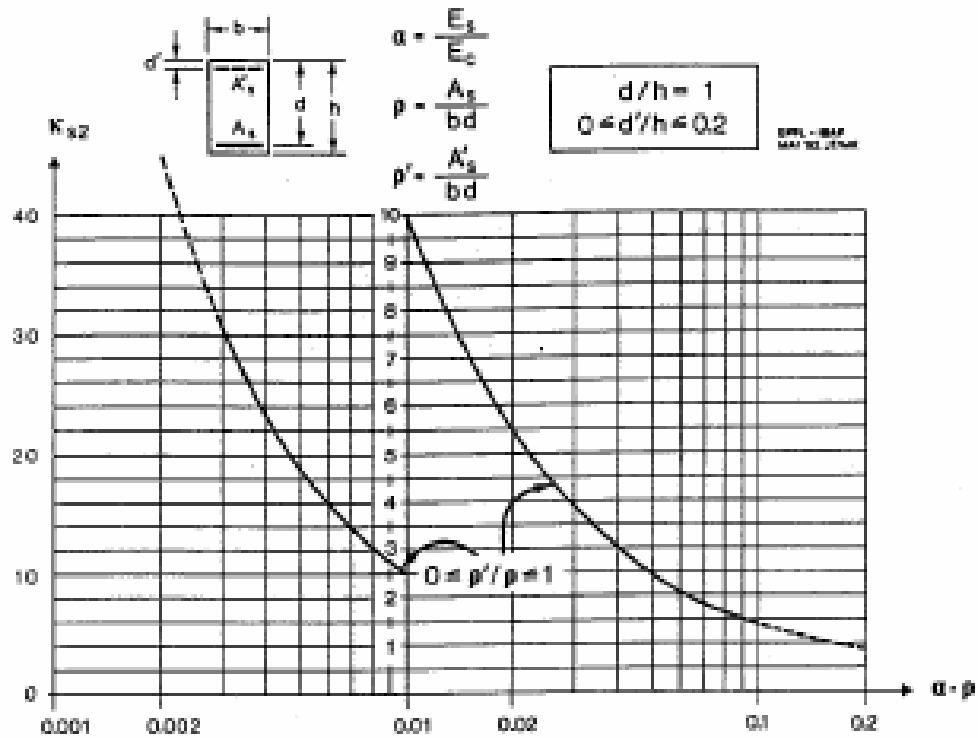
4.3.2 (1)



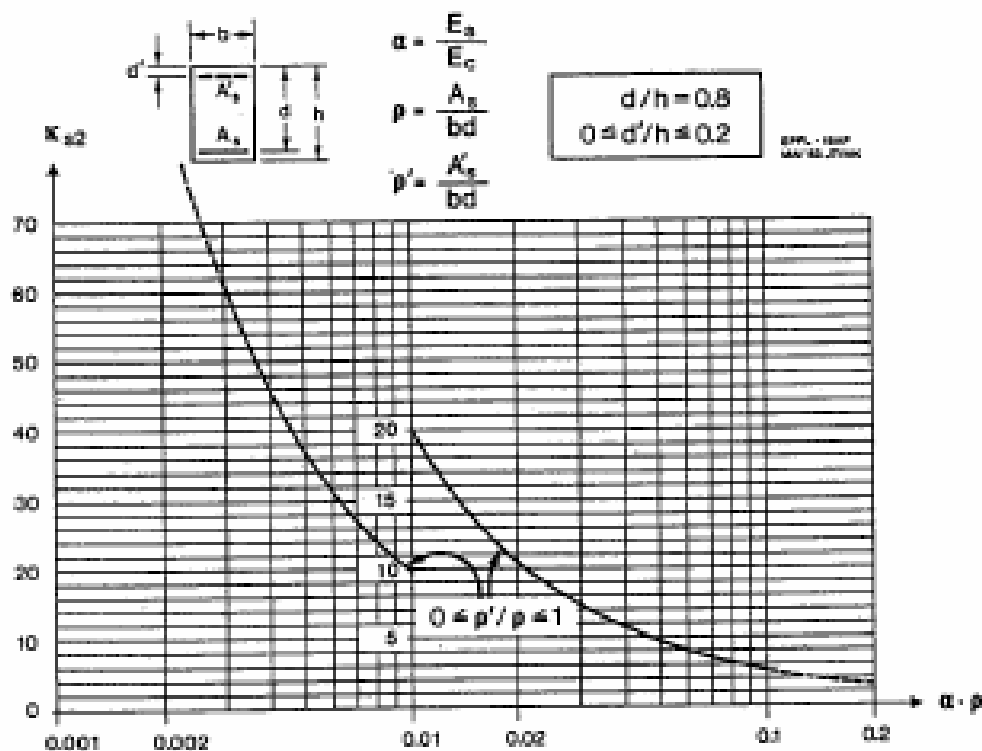
4.3.2 (1)



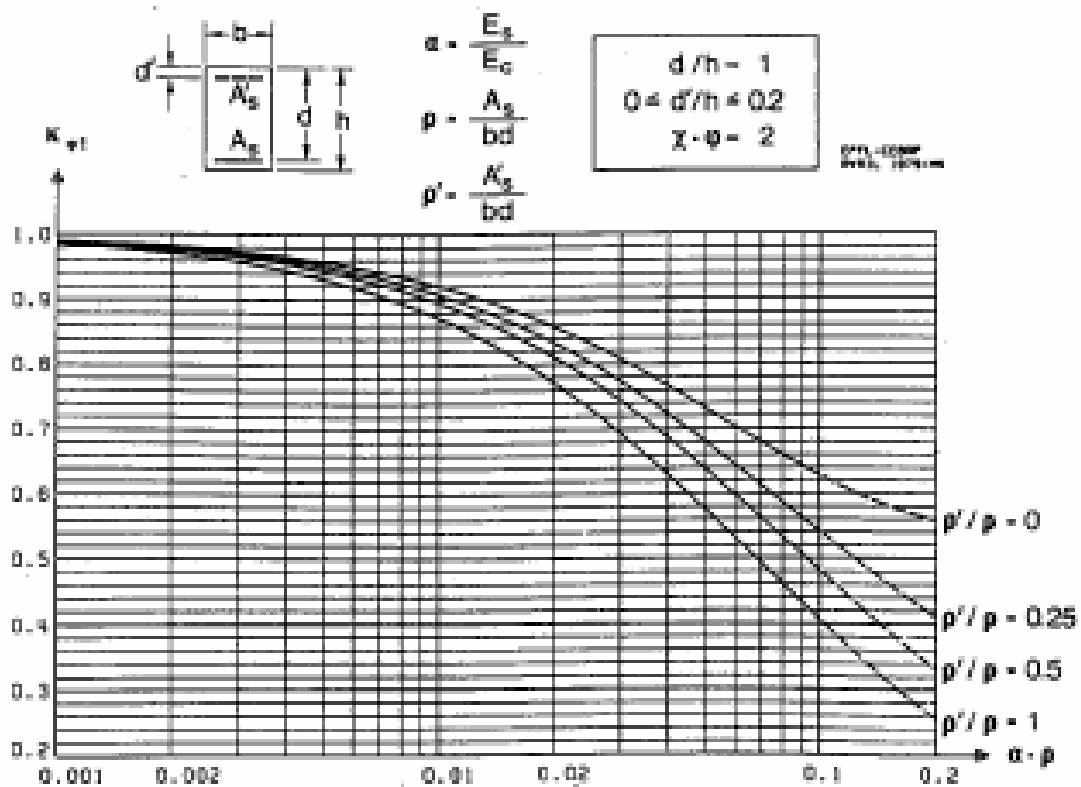
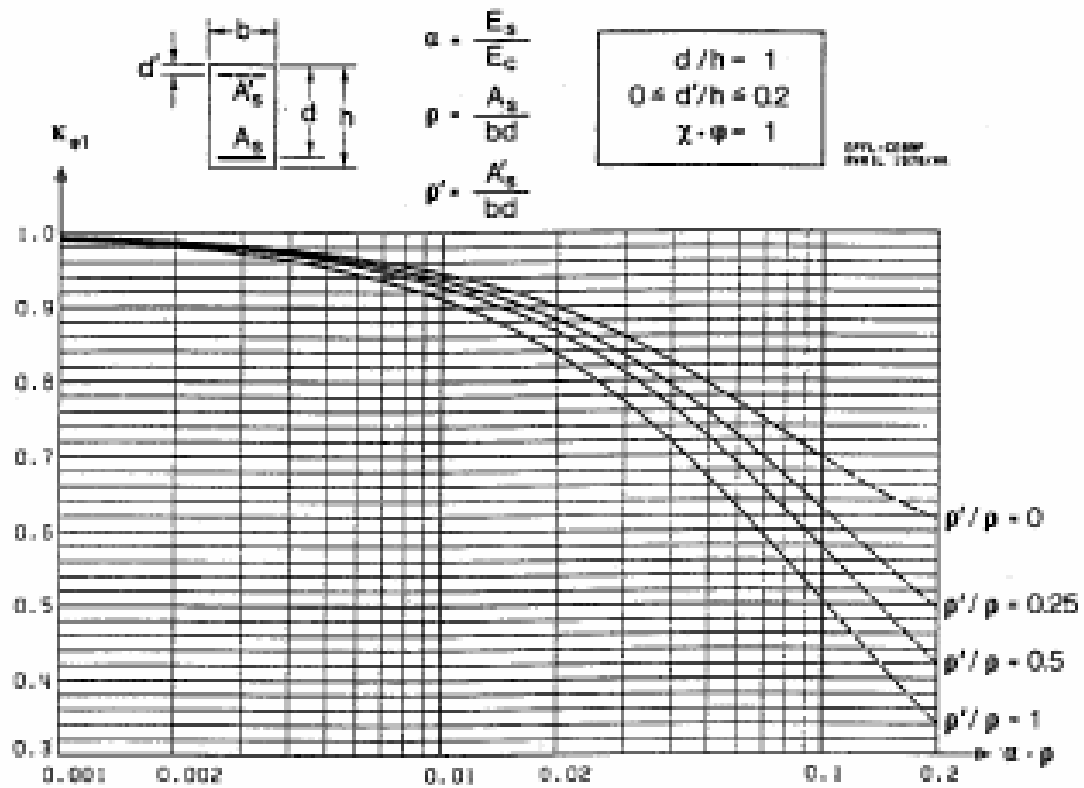
4.3.2 (2)



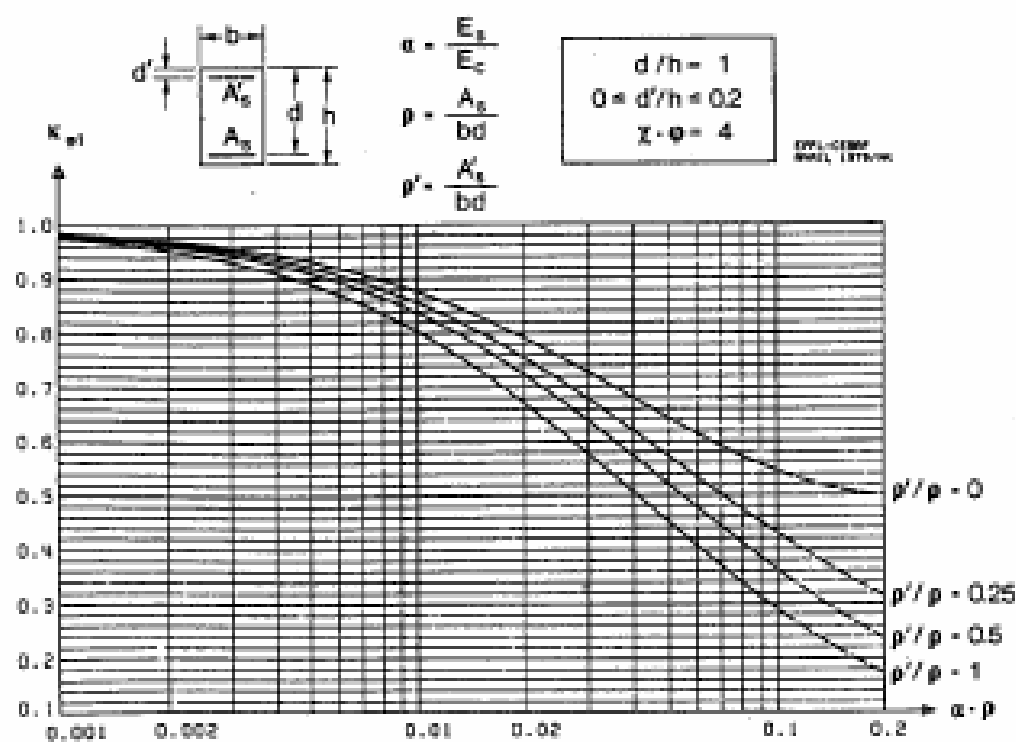
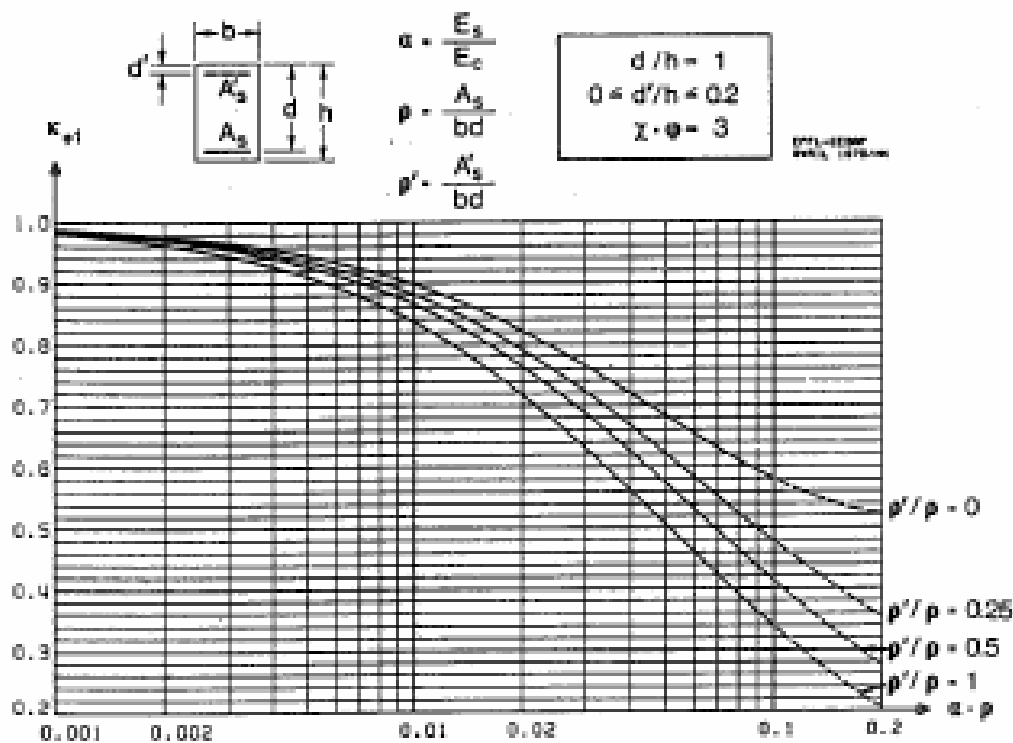
4.3.2 (2)



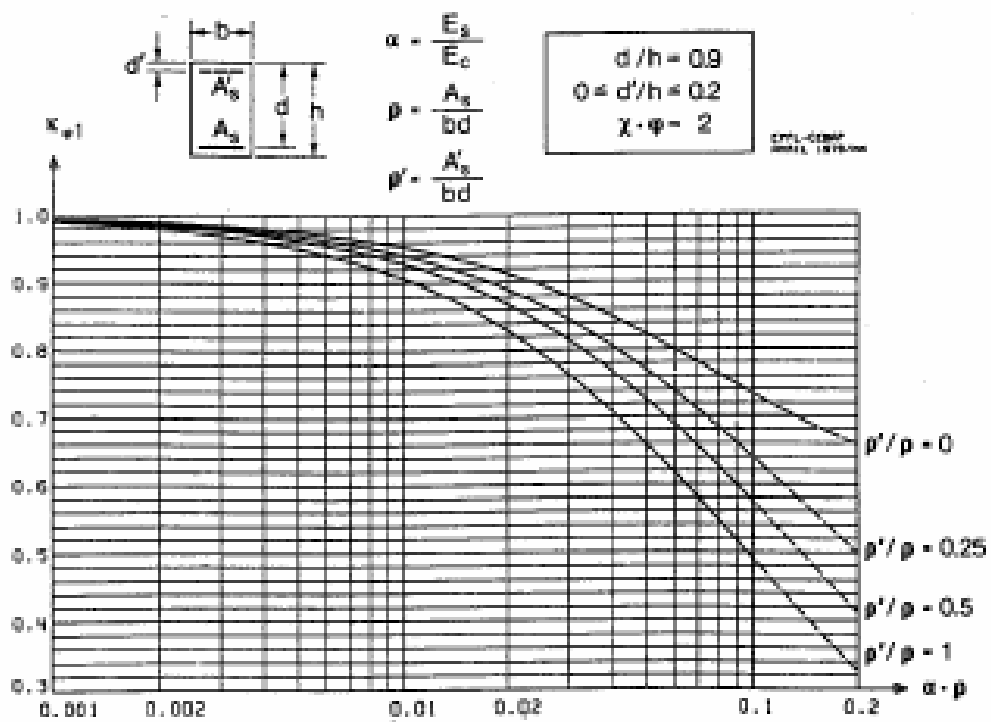
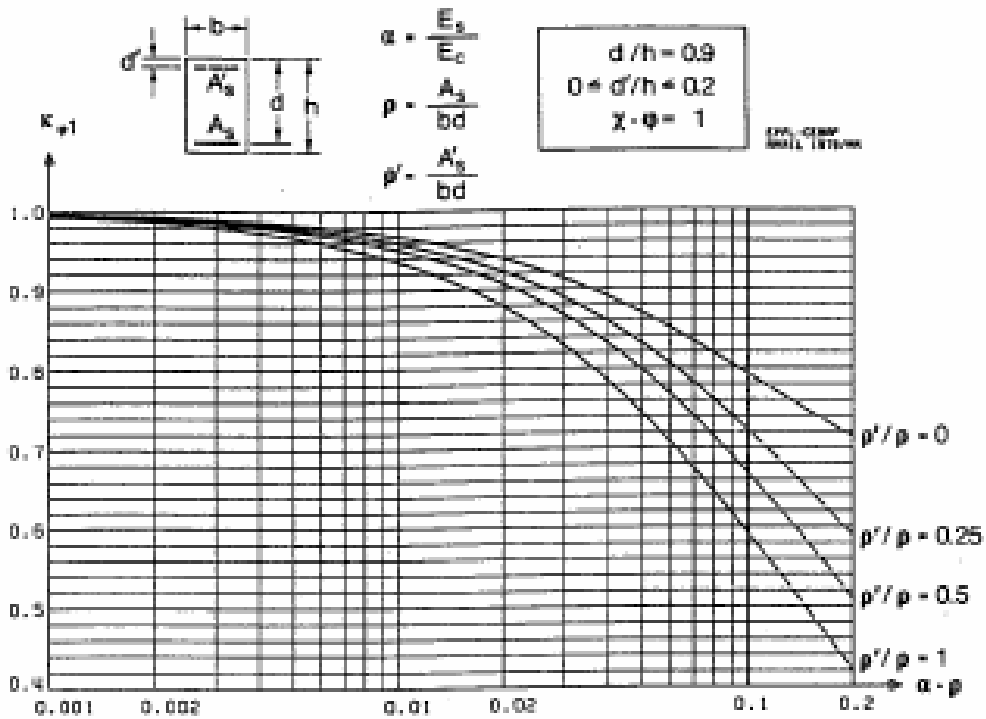
4.3.2 (3)



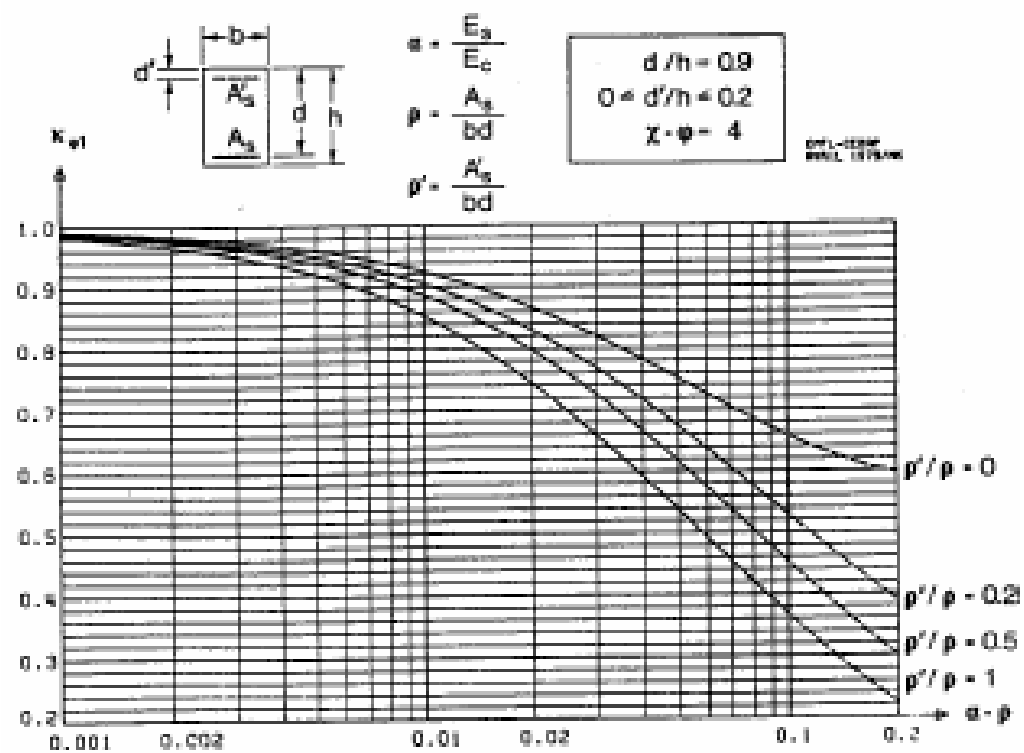
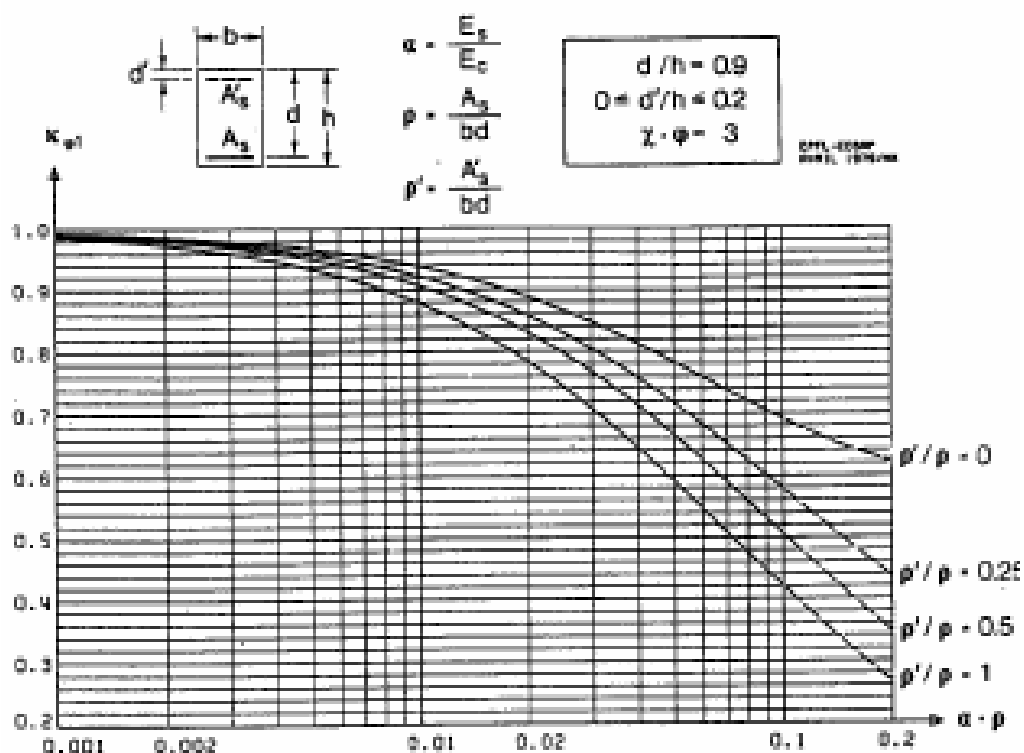
4.3.2 (3)



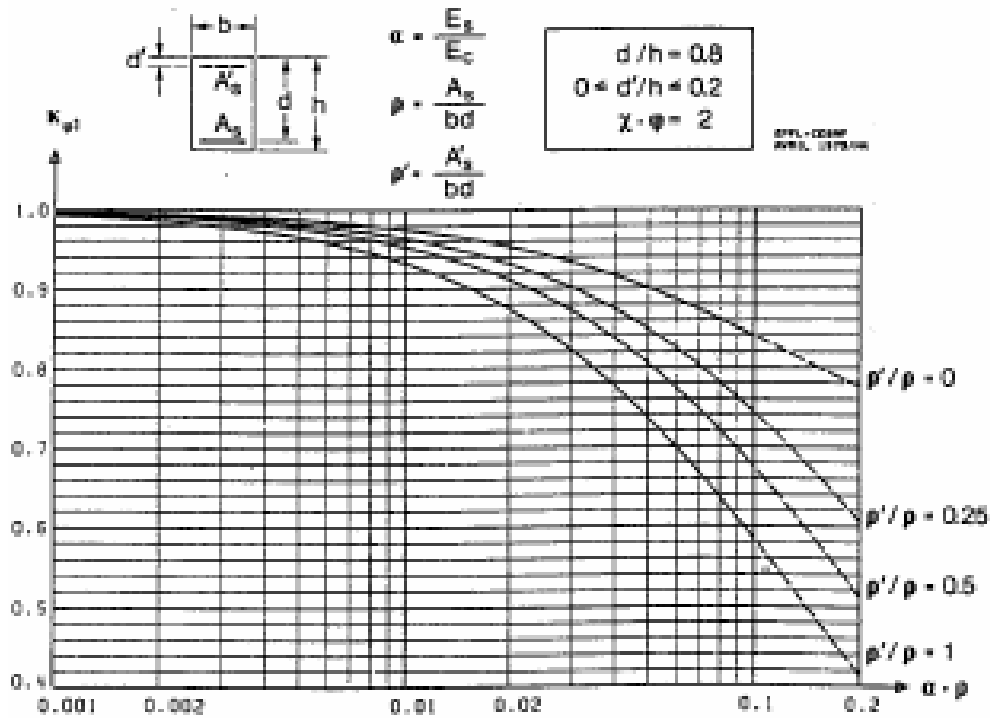
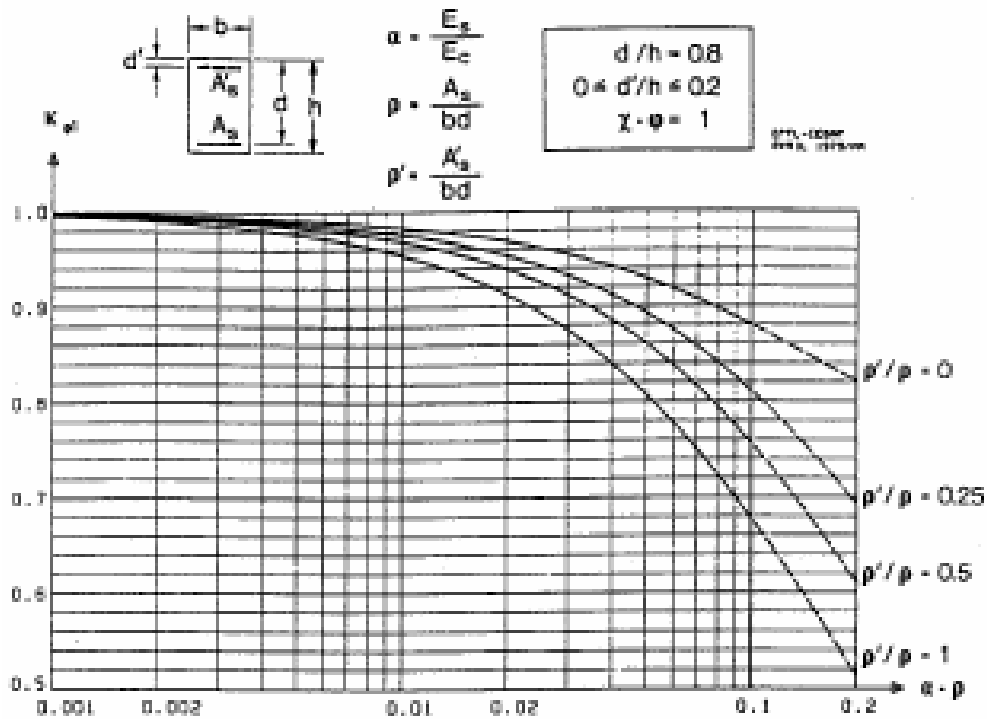
4.3.2 (4)



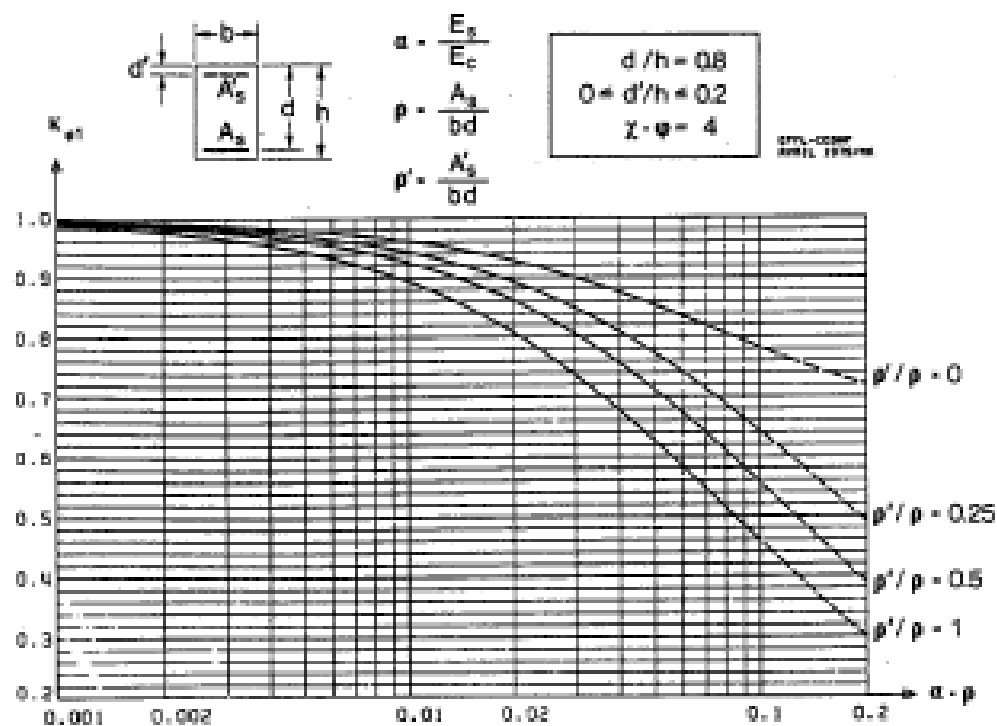
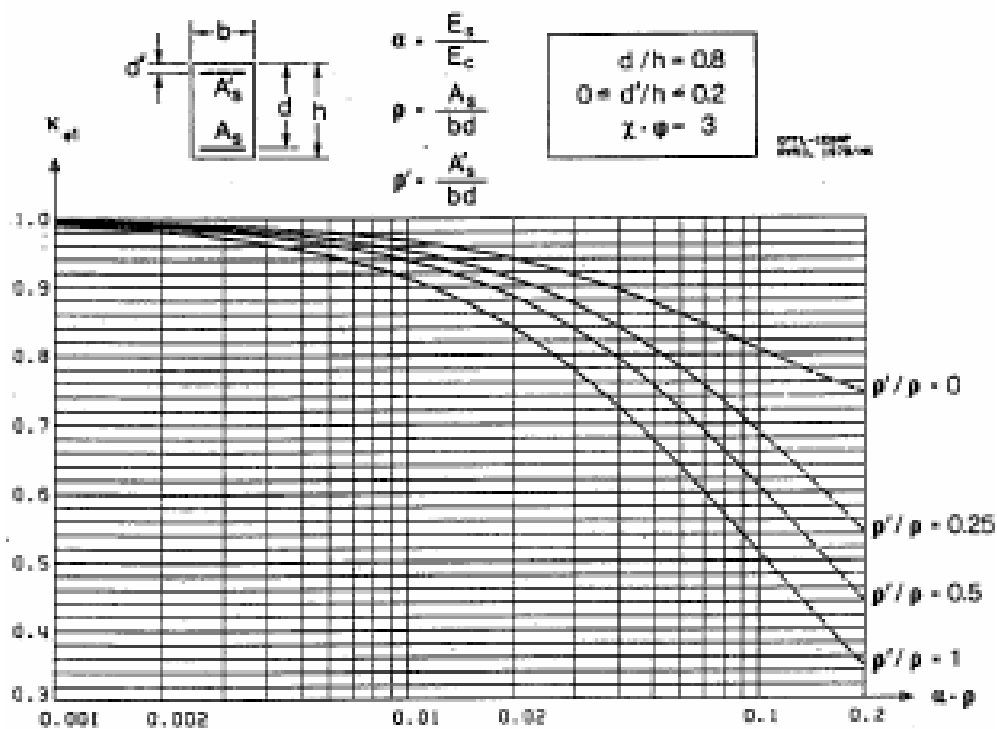
4.3.2 (4)



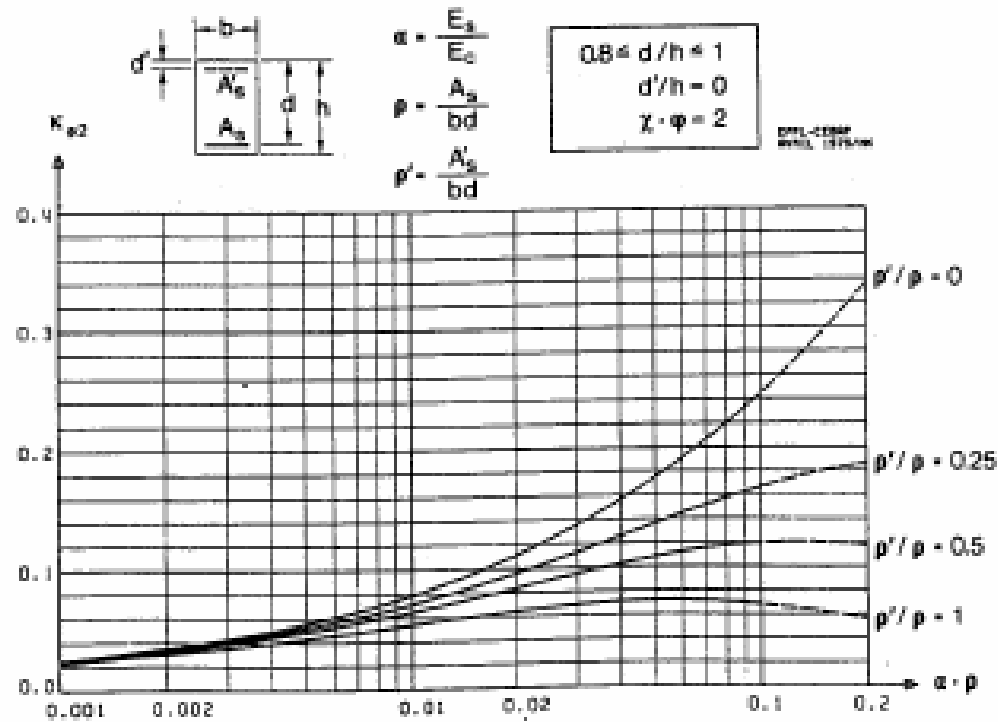
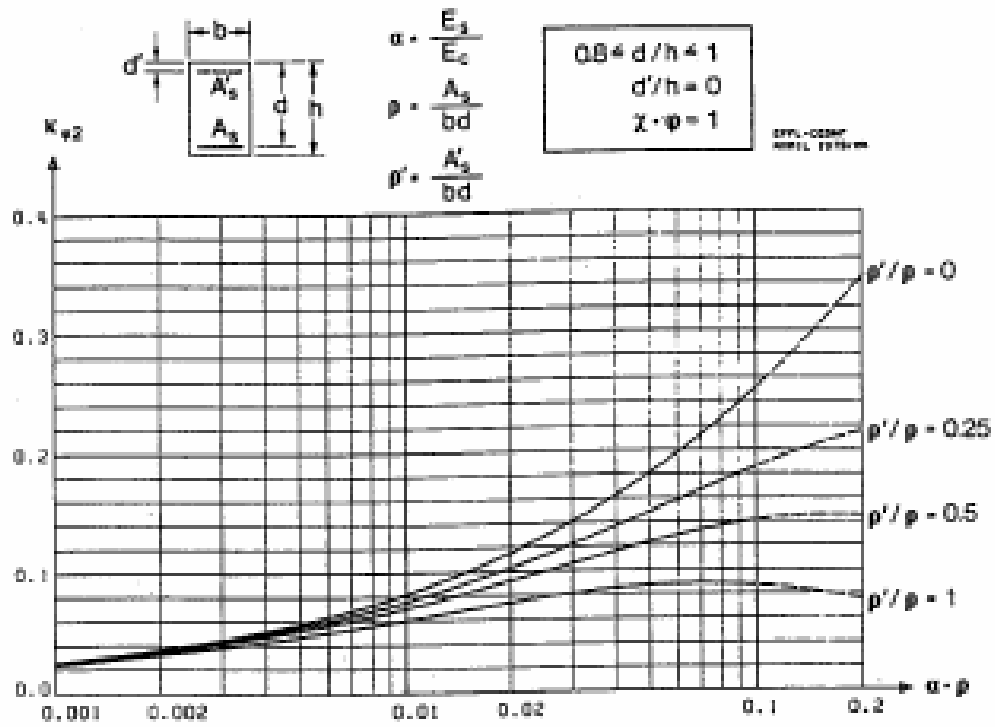
4.3.2 (5)



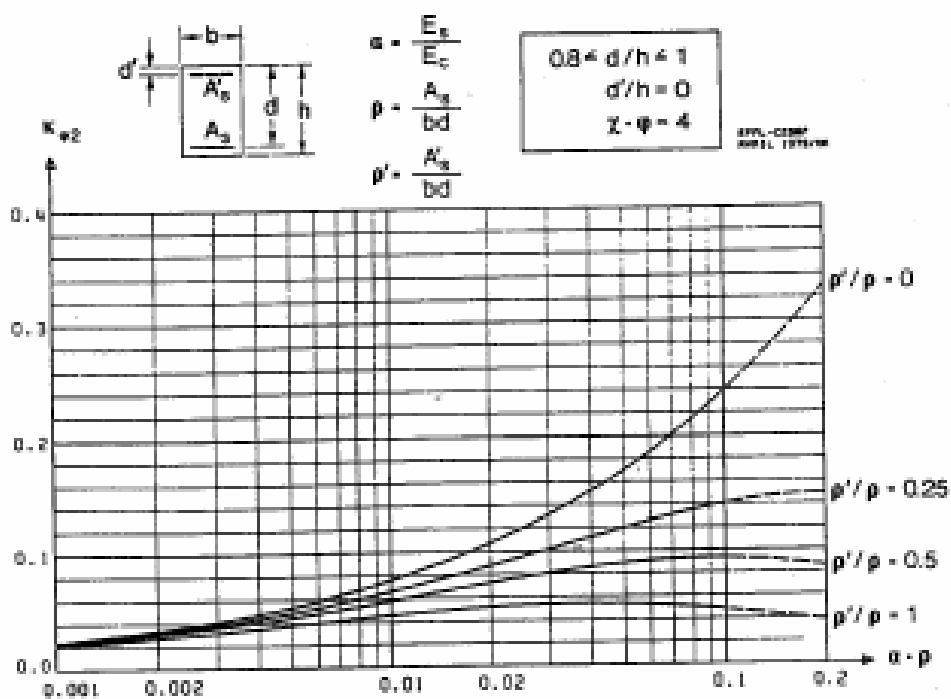
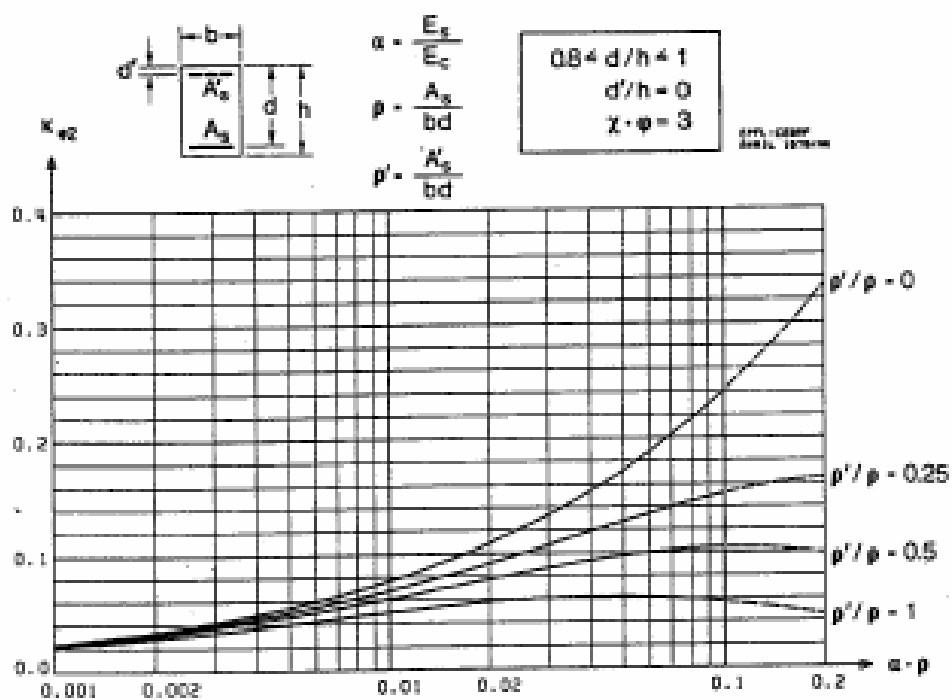
4.3.2 (5)



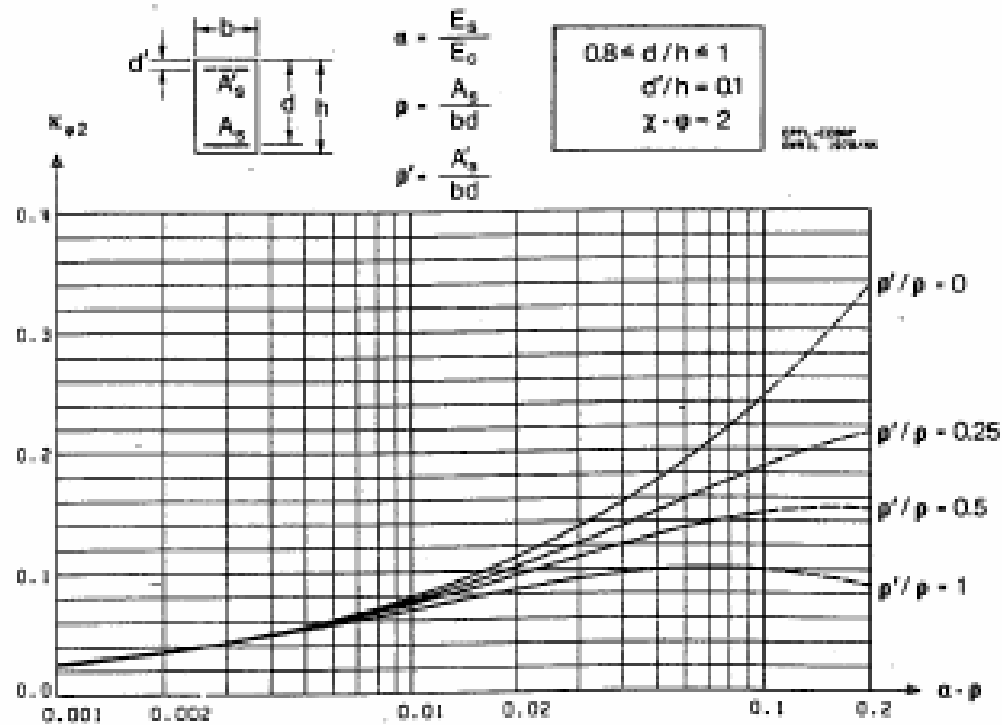
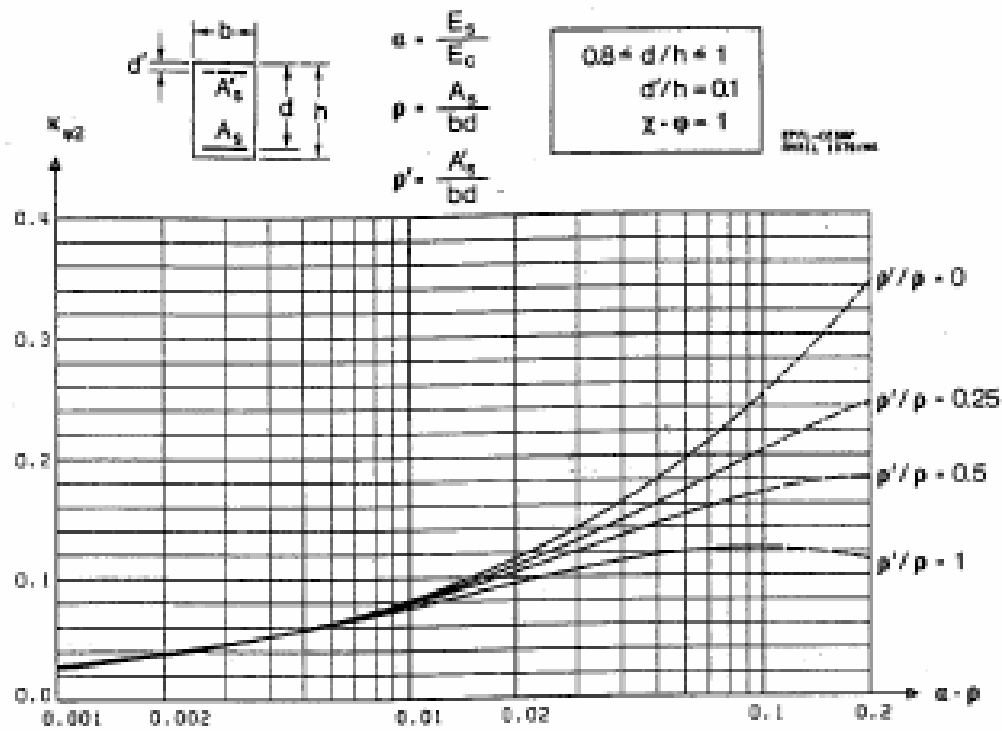
4.3.2 (6)



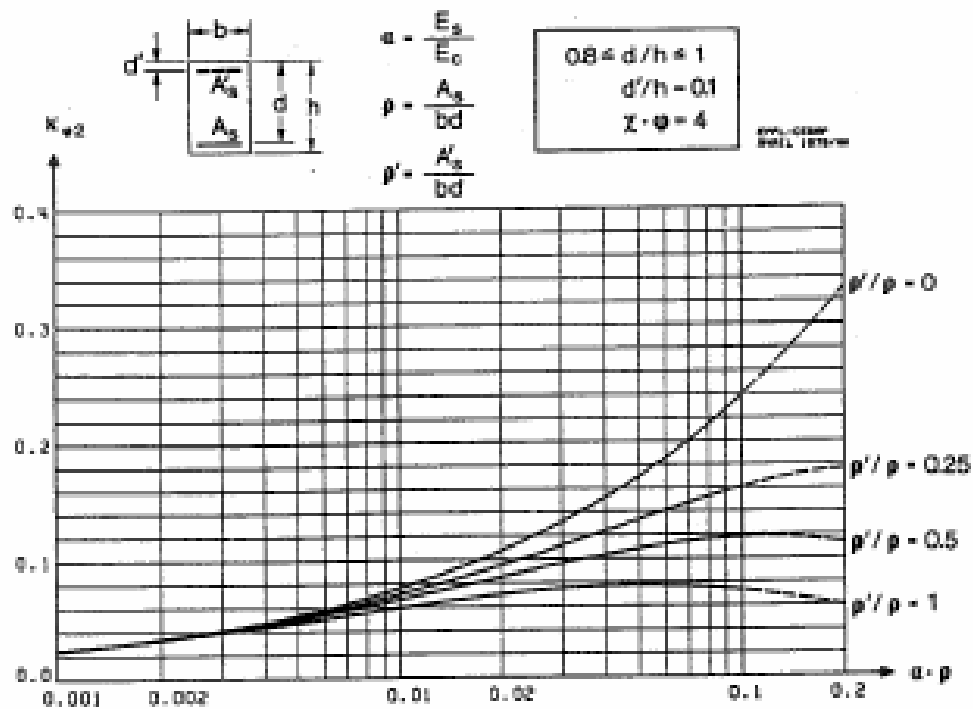
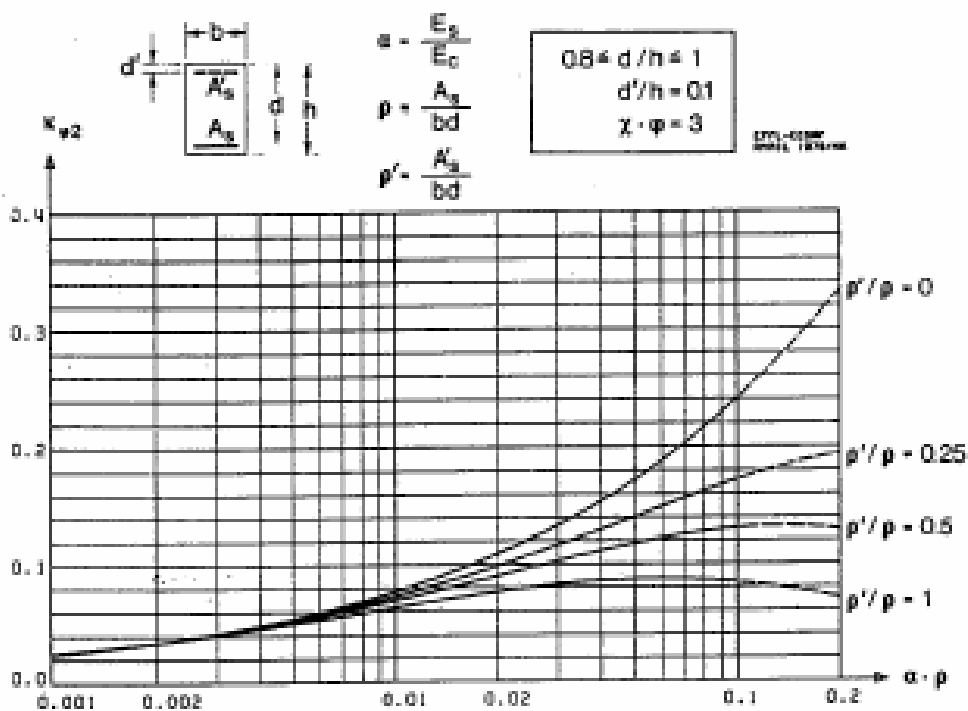
4.3.2 (6)



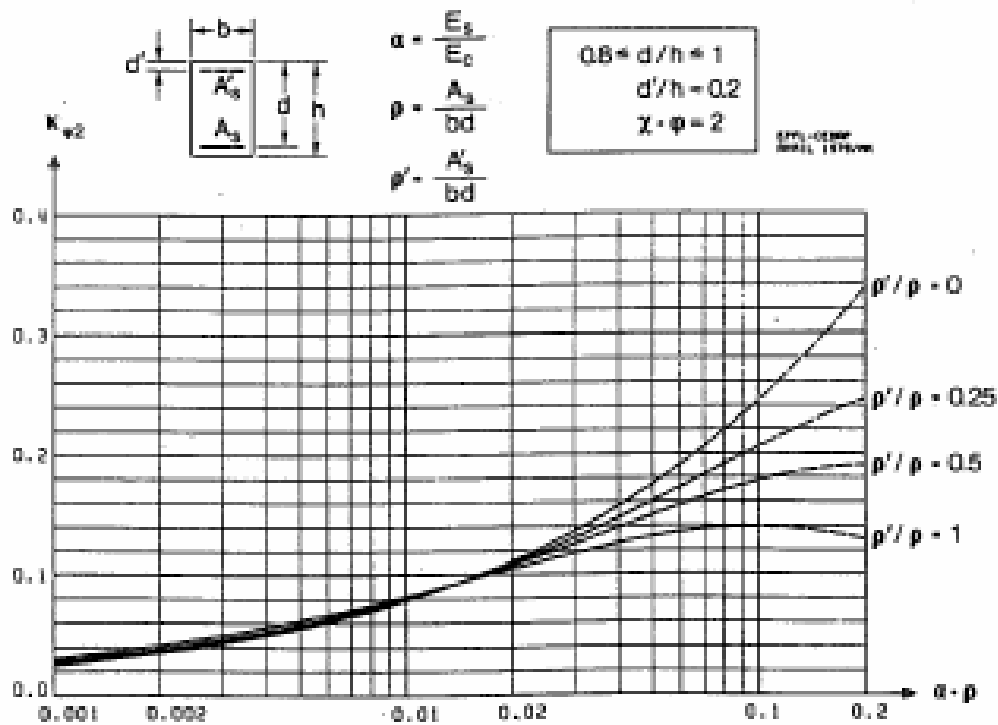
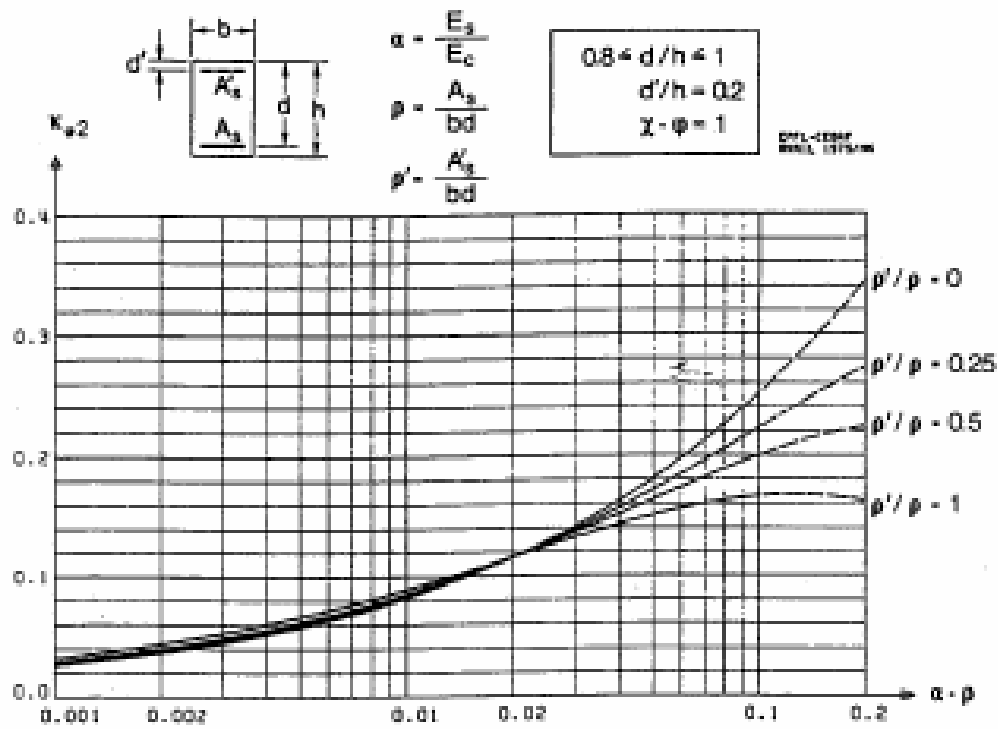
4.3.2 (7)



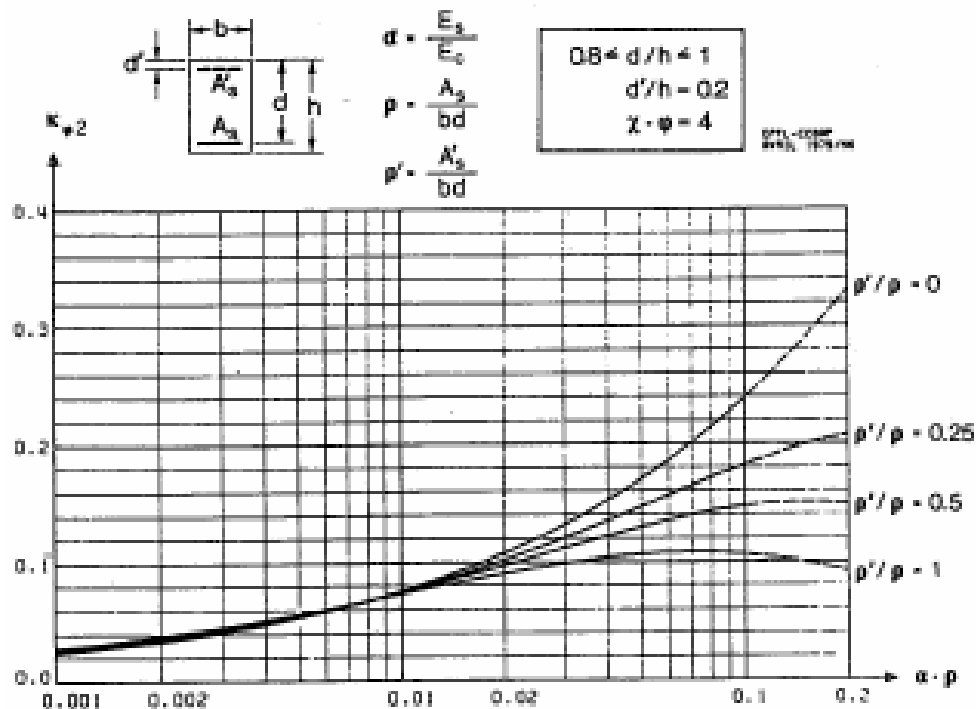
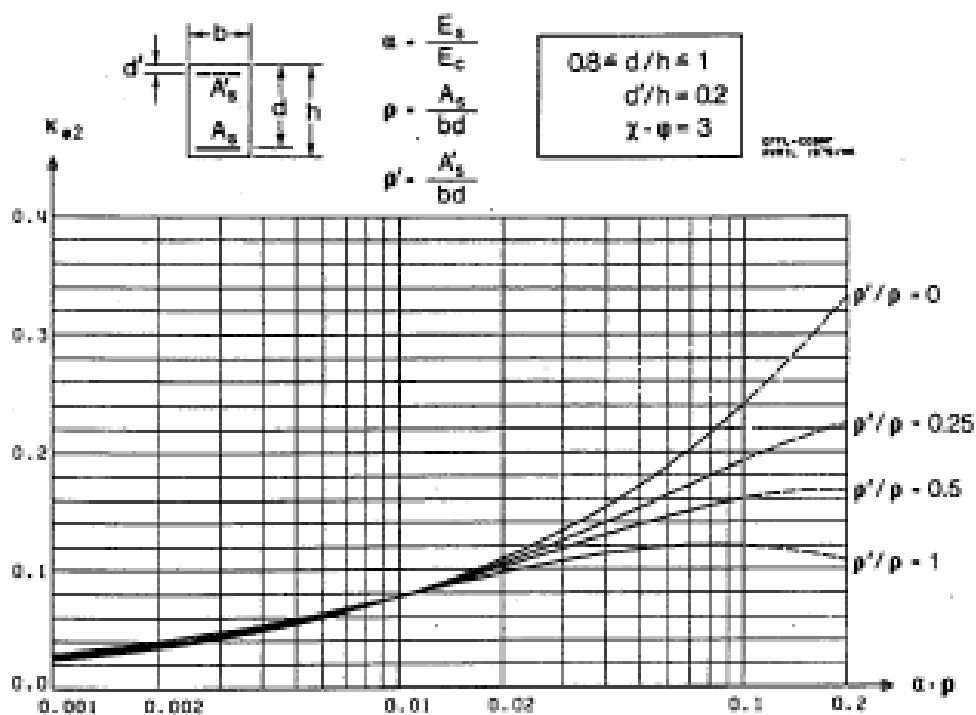
4.3.2 (7)



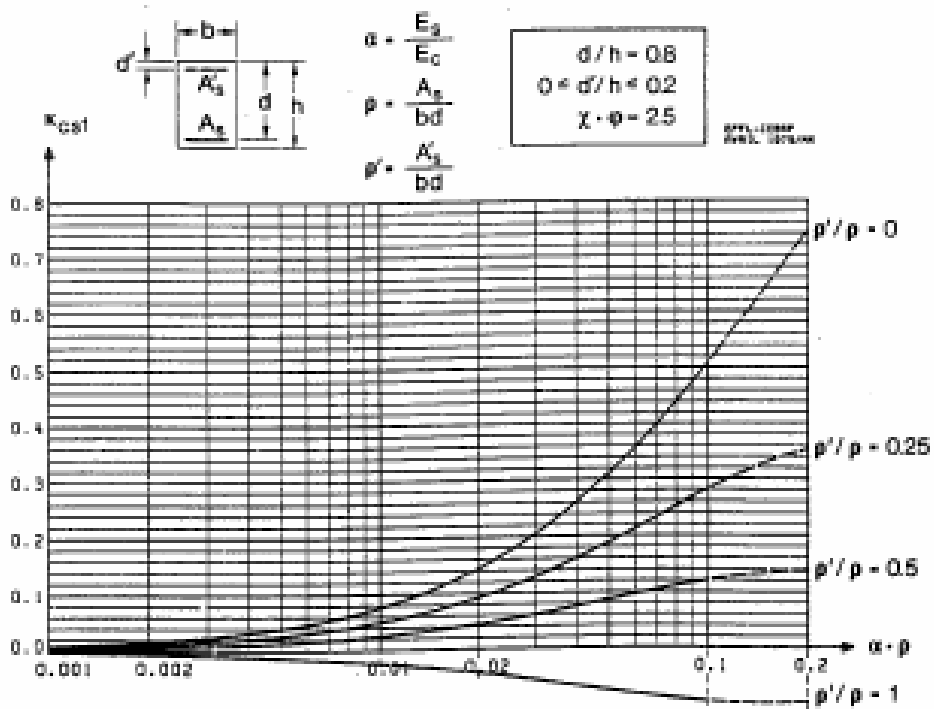
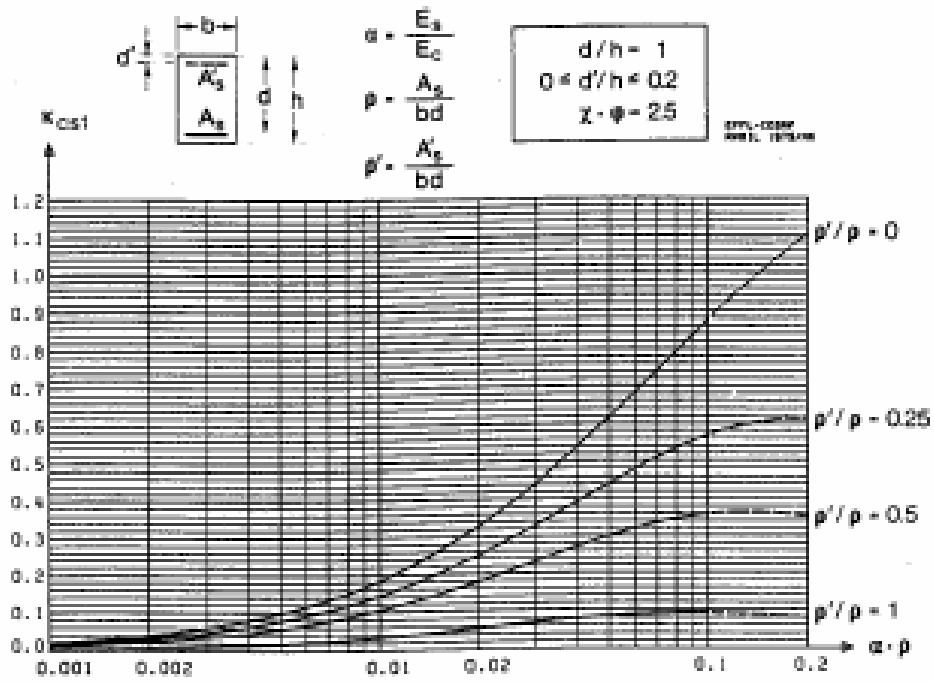
4.3.2 (8)



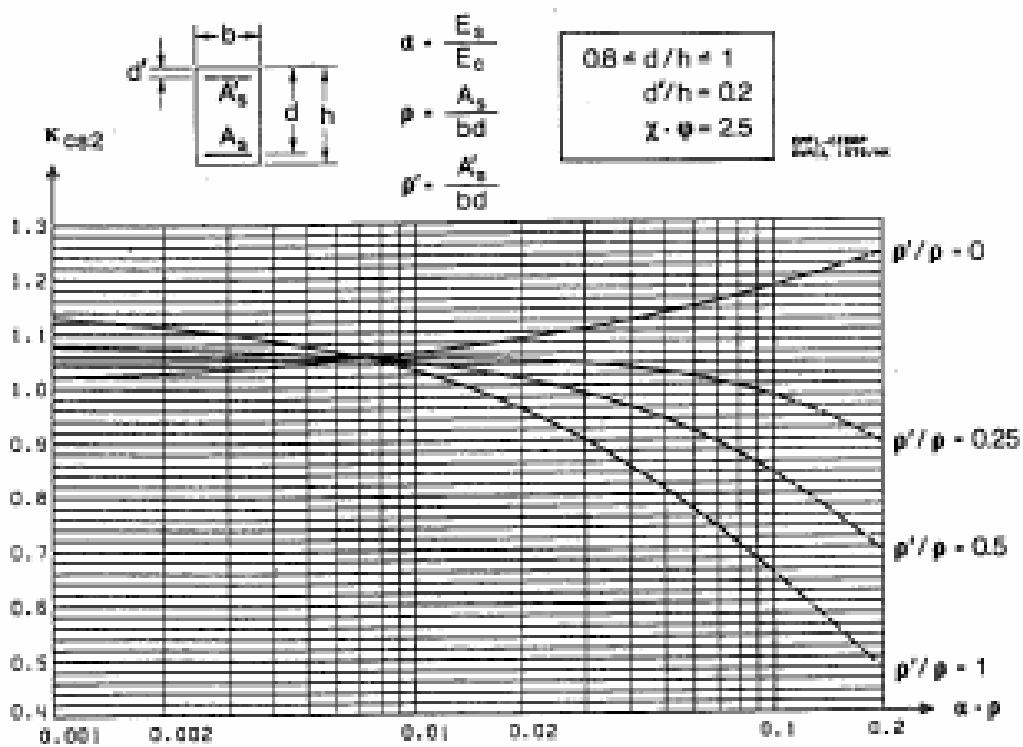
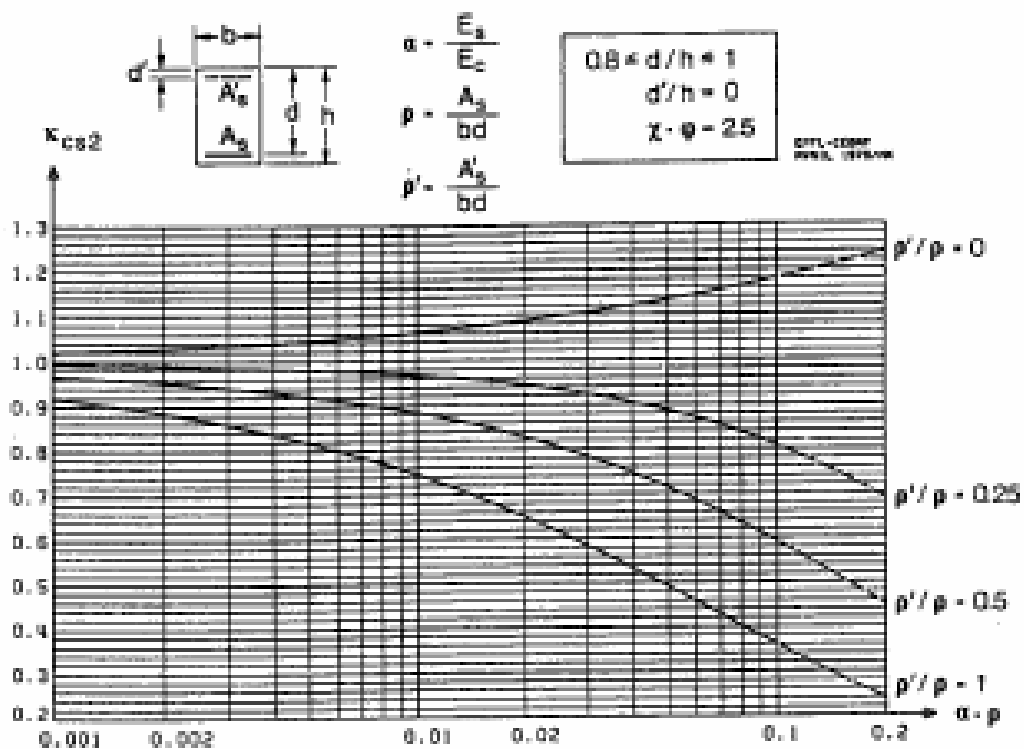
4.3.2 (8)



4.3.2 (9)



4.3.2 (10)



ANEXO B – MAPA DOS MOMENTOS FLETORES RESULTANTES DA COMBINAÇÃO QUASE-PERMANENTES DE AÇÕES

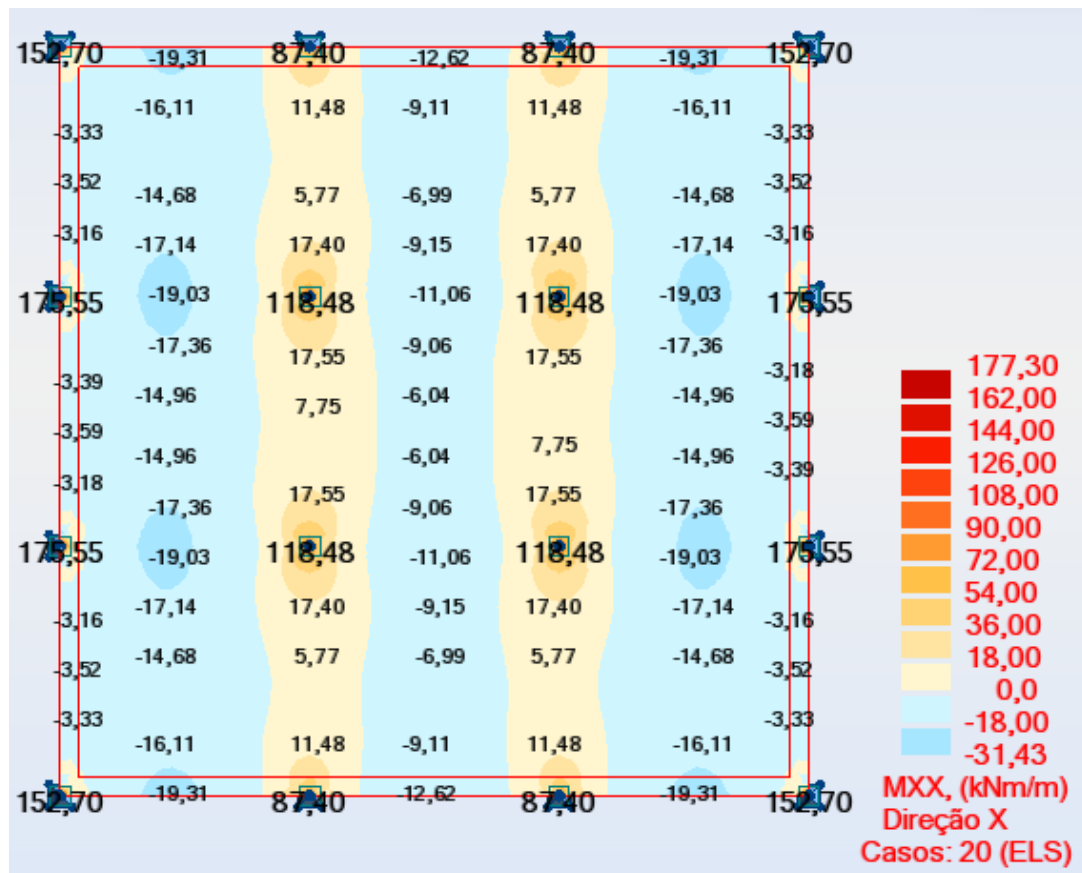


Fig.B.1 – Mapa de momentos fletores atuantes na direção X (Laje simétrica)

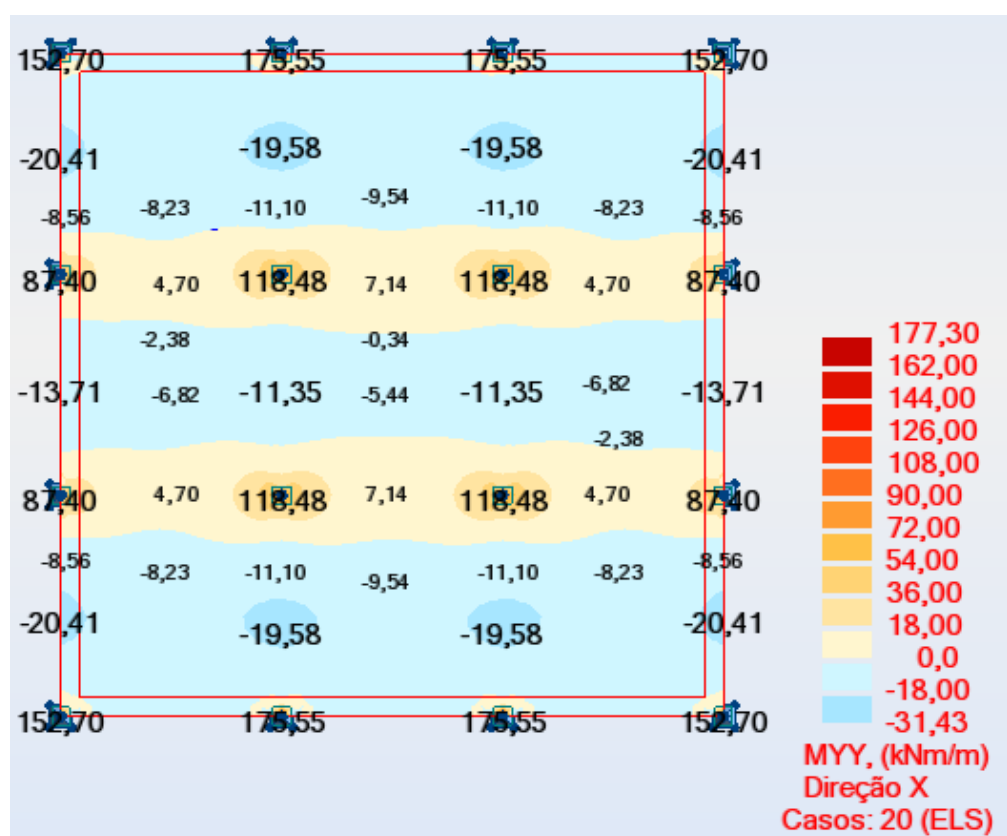


Fig.B.2 – Mapa de momentos fletores atuantes na direção Y (Laje simétrica)



Fig.B.3 – Mapa de momentos fletores atuantes na direção X (Laje não simétrica)

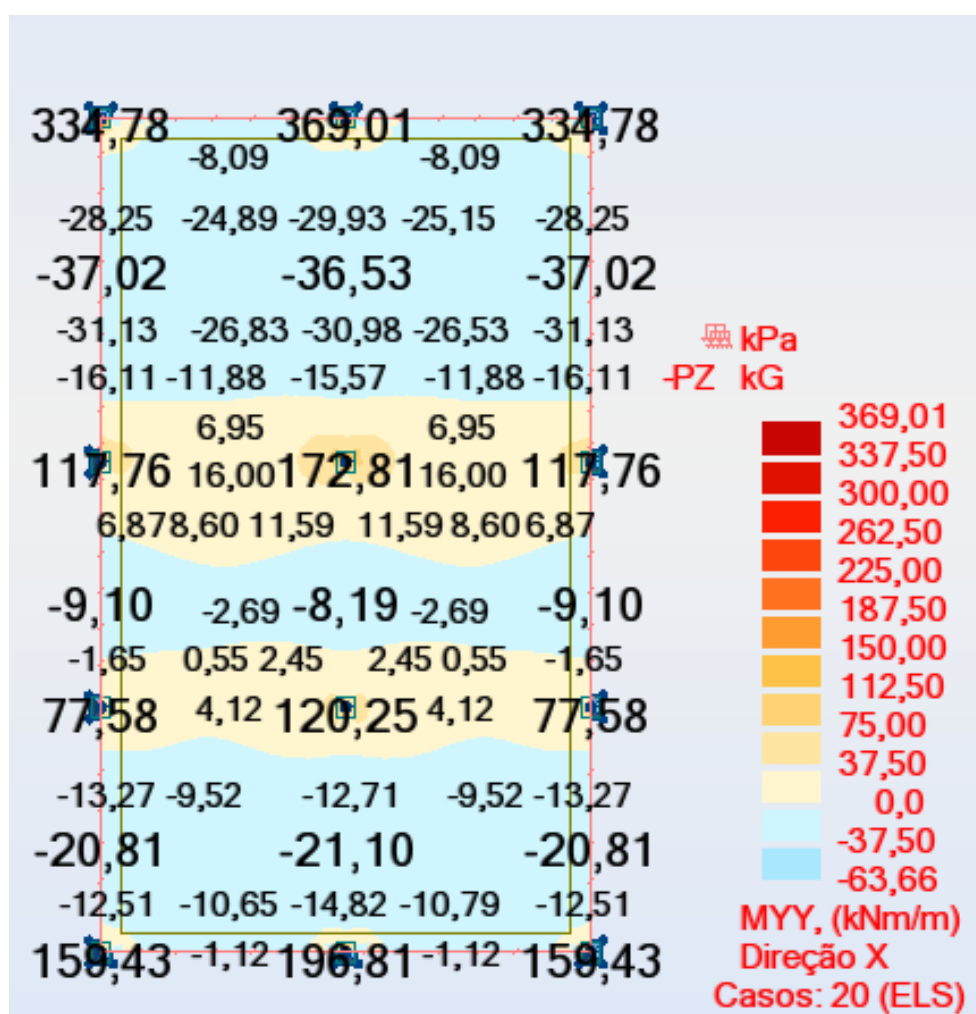


Fig.B.4 – Mapa de momentos fletores atuantes na direção Y (Laje não simétrica)